ANALÍZIS 1. | I. Zárthelyi | 2018. október 11.

Mérnökinformatikus szak | β-variáns | Munkaidő: 75 perc

1. feladat (14 pont)
Adja meg az $2iz^3 = (1+i)^8$ egyenlet összes megoldását.

2. feladat (4+12 pont)
a) Ismertesse a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ definícióját.
b) A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+2n+3}{n^2+3n+2} = 5.$$

3. feladat (11+11+8 pont)
Konvergensek az alábbi sorozatok? Ha igen, mi a határértékük?

$$a)\ \sqrt{5n^2+3n} - \sqrt{5n^2-2n}, \qquad b)\ \left(\frac{5n-9}{5n+8}\right)^{7n}, \qquad c)\ \frac{6^n}{(-3)^n+5^n}.$$

4. feladat (20 pont)
Legyen (a_n) az $a_1 = 3$,

$$a_{n+1} = 5 - \frac{4}{a_n}$$

rekurzióval megadott sorozat. Igazolja, hogy $1 \leq a_n \leq 4$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Bizonyítsa be, hogy a sorozat konvergens, és adja meg a határértékét.

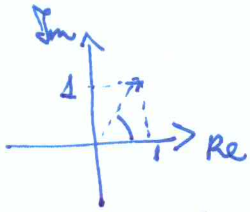
5. feladat (20 pont)
Adja meg az alábbi sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz szuperiorját és limesz inferiorját. Konvergens a sorozat?

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^7+(-1)^n n^7}{3n^3+2n+5}}.$$

IMSC feladat (8 IMSC pont)
a) Írja föl azt az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzformációt, ami a komplex számsíkon az origó körül 60°-kal forgat pozitív irányban!
b) Írja föl azt a $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ transzformációt, ami a komplex számsíkon az 1 pont körül 60°-kal forgat negatív irányban!
c) Írja föl a $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(g(z))$ transzformációt! Mi ennek a transzformációnak a geometriai jelentése?

① $2iz^3 = (1+i)^8$

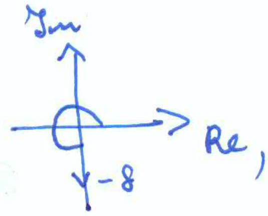
[14] $(1+i)^8$ kiszámításához



$1+i = \left(\sqrt{1+1}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ②

$\Rightarrow (1+i)^8 = \sqrt{2}^8\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = 2^4 = 16$ ②, innen

$2iz^3 = 16 \Rightarrow z^3 = \frac{16}{2i}\cdot\frac{-2i}{-2i} = -8i$ ②, a gyökvonáshoz



azaz $-8i = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ ②

mivel $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)$ $k = 0, 1, 2$-re, így

$k=0$ $z_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$ ②

$k=1$ $z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\overbrace{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} + i\overbrace{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}^{-\frac{1}{2}}\right) = -\sqrt{3} - i$ ②

$k=2$ $z_3 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i$ ②

③ [11] a, $a_n = \sqrt{5n^2+3n} - \sqrt{5n^2-2n} \to ?$

[30]

$$\left(\sqrt{5n^2+3n} - \sqrt{5n^2-2n}\right)\left(\frac{\sqrt{5n^2+3n} + \sqrt{5n^2-2n}}{\sqrt{5n^2+3n} + \sqrt{5n^2-2n}}\right) \text{③} = \frac{(5n^2+3n) - (5n^2-2n)}{\sqrt{5n^2+3n} + \sqrt{5n^2-2n}} =$$

$$\frac{5n}{\sqrt{5n^2+3n} + \sqrt{5n^2-2n}} \text{②} = \frac{/n}{/n}\ \frac{5}{\sqrt{5+\frac{3}{n}} + \sqrt{5-\frac{2}{n}}} \text{③} \to \frac{5}{\sqrt{5+0} + \sqrt{5-0}} \text{③} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

[11] b, $b_n = \left(\frac{5n-9}{5n+8}\right)^n \to ?$

$$\left(\frac{5n-9}{5n+8}\right)^n \text{⑥} = \left(\frac{5\cancel{n}}{5n}\right)\left[\frac{\left(1 - \frac{9/5}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{8/5}{n}\right)^n}\right]^7 \text{⑤} \to \left[\frac{e^{-9/5}}{e^{8/5}}\right]^7 = \left[e^{-17/5}\right]^7 = e^{-\frac{119}{5}}$$

[8] c, $c_n = \frac{6^n}{(-3)^n + 5^n} \to ?$

$$\frac{6^n}{(-3)^n + 5^n} \text{⑥} = \frac{\overbrace{6^n}^{\nearrow\infty}}{5^n}\ \overbrace{\frac{1}{\underbrace{\left(-\frac{3}{5}\right)^n}_{\to 0} + 1}}^{\nearrow 1,\ \text{így} > \frac{1}{2} \text{ ha } n > N(\frac{1}{2})} \text{③} > \left(\frac{6}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \to \infty$$

, így a speciális rendőr elv m. att $c_n \to \infty$.

② a, Azt $a_n \to A \in \mathbb{R}$ ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ amelyre $|a_n - A| < \varepsilon$ ha

[16] $n > N(\varepsilon)$. ④

b, $\frac{5n^2+2n+3}{n^2+3n+2} \to 5$, ui:

$$\left|\frac{5n^2+2n+3}{n^2+3n+2} - 5\right| \overset{\text{②}}{=} \left|\frac{5n^2+2n+3-5n^2-15n-10}{n^2+3n+2}\right| = \frac{|-13n-7|}{n^2+3n+2} \text{②} =$$

$$\frac{13n+7}{n^2+3n+2} \text{②} \le \frac{13n+7n}{n^2} \text{②} = \frac{20}{n} < \varepsilon \text{ ha } n \overset{\text{②}}{>} \frac{20}{\varepsilon} \Rightarrow N(\varepsilon) = \left[\frac{20}{\varepsilon}\right] \text{②}$$ jó választás.

4 $a_1=3$ $\quad a_{n+1}=5-\frac{4}{a_n}$

$\boxed{20}$

$1\le a_n\le 4$ mert: $\quad 1\le 3\le 4$, tehát a_1-re igaz. 2

Tfh n-ig igaz az állítás! 1 Ekkor: $\quad 1\le a_n\le 4 \quad \backslash : a_n>0$

$\frac{1}{a_n}\le 1\le\frac{4}{a_n}$, azaz

$1\le\frac{4}{a_n}$ és $\frac{1}{a_n}\le 1 \quad \backslash \cdot -4$

$-1\ge\frac{-4}{a_n} \qquad -\frac{4}{a_n}\ge -4 \quad \backslash +5$

2 $4\ge 5+\frac{-4}{a_n}\ge 1$ 1

$4\ge a_{n+1}\ge 1 \Rightarrow$ igaz $\forall n$-re

a_n mon nő, ui $a_1=3$ $\quad a_2=5-\frac{4}{3}=3\frac{2}{3}$ így $a_1\le a_2$ 2

Tfh n-ig igaz az állítás! Ekkor: 1 $a_n\le a_{n+1} \quad \backslash : a_n>0,\ : a_{n+1}>0$

$\frac{1}{a_{n+1}}\le\frac{1}{a_n} \quad \backslash \cdot -4$

$\frac{-4}{a_{n+1}}\ge\frac{-4}{a_n} \quad \backslash +5$

$5-\frac{4}{a_{n+1}}\ge 5-\frac{4}{a_n}$ 1

2 $a_{n+2}\ge a_{n+1} \Rightarrow$ igaz $\forall n$-re

2 Ha a_n korlátos és monoton, akkor konvergens. Másrészt ha $\lim_{n\to\infty} a_n=A$, akkor $A=5-\frac{4}{A}$ 2, innen $A^2-5A+4=0=(A-4)(A-1)$ 2 Mivel $a_1=3$ és a_n mon nő, így csak 4 lehet a limesz, 1 nem. 2

5 $a_n=\sqrt[n]{\frac{n^7+(-1)^n n^7}{3n^3+2n+5}}$ $\quad$ Tp, limsup, liminf $=$?

$\boxed{20}$

Ha n ptlan, akkor $a_n\equiv\sqrt[n]{0}$ 2

Ha n ps, akkor $a_n=\sqrt[n]{\frac{2n^7}{3n^3+2n+5}}$ 1 Ekkor:

$$\overset{1}{\uparrow}\sqrt[n]{\frac{2}{3}}\cdot\Big(\overset{1}{\uparrow}\sqrt[n]{n}\Big)^4=\sqrt[n]{\frac{2n^7}{3n^3}} \overset{2}{\ge} \sqrt[n]{\frac{2n^7}{3n^3+2n+5}} \overset{2}{\ge} \sqrt[n]{\frac{2n^7}{3n^3+2n^3+5n^3}} \overset{3}{=} \overset{1}{\uparrow}\sqrt[n]{\frac{2}{10}}\cdot\Big(\overset{1}{\uparrow}\sqrt[n]{n}\Big)^4$$

a rendőrelv miatt a ps indexű rs limesze 1. 2

Így a torlódási pontok halmaza $\{0,1\}$, 2

$\liminf_{n\to\infty} a_n=0 \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n=1$. Mivel $\liminf a_n\ne\limsup a_n$, így a sorozat nem konvergens. 2