ANALÍZIS 1. | **II. Zárthelyi** | **2018. november 22.**
Mérnökinformatikus szak | β-variáns | Munkaidő: 75 perc

---

1. feladat (12 pont)

Hol és milyen típusú szakadásai vannak az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4x+3} + \frac{x+2}{|x+2|}$$

2. feladat (4+12 pont)

a) Definiálja a valós értékű f függvény x_0 pontbeli deriváltját! (x_0 az értelmezési tartomány belső pontja.)
b) Deriválja az $|x+1| \cdot \sin(2x+2)$ függvényt értelmezési tartománya minden pontjában.

3. feladat (9+9+9+9 pont)

Számolja ki az alábbi határértékeket

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsh}(3x^2)}{\operatorname{arctg}(5x^2)}$, *b*) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{\ln(2+x)} \right)$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{2\sin^2 x}}$, *d*) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\operatorname{ch}(3x+2)}{\operatorname{sh}(3x-4)}$

4. feladat (18 pont)

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken az $f(x) = (x^2-8)e^{-x}$ függvény szigorúan monoton. Határozza meg a függvény maximumát, illetve minimumát a $[0,5]$ intervallumon, amennyiben létezik.

5. feladat (18 pont)

A kétszer differenciálható $y = y(x)$ átmegy az $x_0 = -1$, $y_0 = -1$ ponton és x_0 egy környezetében kielégíti az alábbi implicit egyenletet:

$$y^3 + y^2 - x^2 + 2x = -3.$$

Határozza meg ezen függvény $(-1,-1)$ pontjabeli érintőegyenesének egyenletét! Van-e inflexiója a függvénynek az $x_0 = \cancel{1}$ -1 pontban?

IMSC feladat (8 IMSC pont)

Igazolja, hogy páratlan függvény deriváltja páros, páros függvény deriváltja páratlan. Mit mondhatunk ez alapján a páros, illetve páratlan függvények monotonitásáról, illetve konvexitásáról?

1 12 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}+\dfrac{x+2}{|x+2|}$ Hol és milyen típusú szakadásai vannak?

$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)=0 \iff x=1$ vagy $x=3$ 1

$|x+2|=0 \iff x+2=0 \iff x=-2$

Mivel $f(x)$ folytonos fvek kompozíciója, csak a nevező gyökeiben azaz a $-2, 1, 3$ pontokban lehet szakadása, a többi helyen folytonos. 2

$\underline{x=3}$ $\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-1)}+\dfrac{x+2}{|x+2|}=\lim_{x\to3}\dfrac{x+3}{x-1}+\dfrac{x+2}{|x+2|}=\dfrac{6}{2}+\dfrac{5}{|5|}=4$ 3

Mivel $\exists \lim_{x\to3} f(x)$ és véges, de itt nincsen értelmezve a függvény ebben a pontban megszüntethető szakadás van.

$\underline{x=1}$ $\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}\dfrac{\overbrace{x^2-9}^{\to-8}}{\underbrace{(x-3)}_{\to-2}\underbrace{(x-1)}_{\to0-}}+\dfrac{\overbrace{x+2}^{\to3}}{\underbrace{|x+2|}_{\to3}}=-\infty \Rightarrow$ lényeges szakadás van 3

$\underline{x=-2}$ $\lim_{x\to-2-} f(x)=\lim_{x\to-2-}\dfrac{\overbrace{x^2-9}^{\to-5}}{\underbrace{(x-3)}_{\to-5}\underbrace{(x-1)}_{\to-3}}+\overbrace{\dfrac{x+2}{-(x+2)}}^{=-1}=-\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{4}{3}$

$\lim_{x\to-2+} f(x)=\lim_{x\to-2+}\dfrac{x^2-9}{(x-3)(x-1)}+\overbrace{\dfrac{x+2}{x+2}}^{=1}=-\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{2}{3}$

$\neq$, így véges ugrás 3

2 16 a, 0 Legyen $x_0\in D_f$ belső pont! Ekkor ha $\lim_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ létezik és véges akkor ez a szám a függvény x_0-beli deriváltja. 4

b, $f(x)=|x+1|\sin(2x+2)$ $f'(x)=?$

Az 1.1 a 0 kivételével mindenütt deriválható, így:

$$f'(x)=\begin{cases}\left(-(x+1)\sin(2x+2)\right)'=-\sin(2x+2)+[-(x+1)\cos(2x+2)\cdot2] & \text{ha } x<-1\\ [(x+1)\sin(2x+2)]'=\sin(2x+2)+(x+1)\cos(2x+2)\cdot2 & \text{ha } x>-1\end{cases}$$ 4 4

$x=-1$-ben csak definíció alapján tudjuk kiszámítani a deriváltat, így

$$f'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|-1+h+1|\sin(2(-1+h)+2)-0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{|h|\cdot\sin(2h)}{h}=\lim_{h\to0}|h|\frac{\sin(2h)}{2h}\cdot2=0\cdot1\cdot2=0$$ 4

Azaz a függvény deriválható 0-ban, és a deriváltja 0.

3 36 d, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{ch(3x+2)}{sh(3x-4)}=\lim_{x\to\infty}$ 3 $\dfrac{e^{3x+2}+e^{-3x-2}}{e^{3x-4}\ \ e^{-3x+4}}$ 3 $=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{e^{3x}}}{\cancel{e^{3x}}}\dfrac{e^2+\overbrace{e^{-6x-2}}^{\to0}}{e^{-4}-\underbrace{e^{-6x+4}}_{\to0}}=e^6$ 3

3 a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsinh}(3x^2)}{\operatorname{atan}(5x^2)} \overset{L'H}{\underset{"0"/0}{=}} \text{(1)} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+9x^4}}\cdot 6\cancel{x}}{\frac{1}{1+25x^4}\cdot 10\cancel{x}} \text{ (6)} = \frac{1\cdot 6}{1\cdot 10} = \frac{3}{5} \text{ (2)}$$

b) $$\lim_{x\to -1} \frac{x}{x+1} + \frac{1}{\ln(x+2)} \text{ (1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x\underbrace{\ln(x+2)}_{\to 0} + \underbrace{x+1}_{\to 0}}{\underbrace{(x+1)\ln(x+2)}_{\to 0}} \text{ (3)} \overset{L'H}{\underset{"0"/0}{=}} \text{(1)} \lim_{x\to -1} \frac{\underbrace{\ln(x+2)}_{\to 0} + \frac{x}{x+2}^{\to -1} + 1}{\underbrace{\ln(x+2)}_{\to 0} + \frac{x+1}{x+2}^{\to 0}}$$

$$\overset{L'H}{\underset{"0"/0}{=}} \text{(3)} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+2}_{\to 1} + \frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}}{(x+2)^2}_{\to 1}}{\frac{1}{x+2}_{\to 1} + \frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2}_{\to 1}} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} \text{ (1)}$$

c) $$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{2\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\cos x^{\frac{1}{2\sin^2(x)}}\right)} \text{ (2)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2\sin^2 x}\ln(\cos x)} \text{ (2)}$$

Az $e^{\cdot}$ fv folytonossága miatt elegendő a kitevő határértékét kiszámítani

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\ln(\cos x)}^{0}}{\underbrace{2\sin^2(x)}_{\to 0}} \overset{L'H}{\underset{"0"/0}{=}} \text{2p} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{\cos x}\cdot \cancel{\sin x}}{2\cdot 2\cdot \cancel{\sin(x)}\cdot\cos(x)} = \frac{-1}{2\cdot 2\cdot 1} = -\frac{1}{4} \text{ (1)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \text{ (1) a}$$

keresett lim

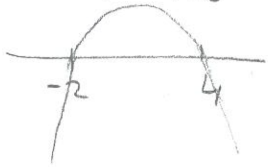
4) $f(x) = (x^2-8)e^{-x}$ Adja meg azon legbővebb intervallumokat ahol a fv szig. mon! Hat. meg a fv max-át ill. min-át a $[0,5]$-n ha létezik!

$\boxed{18}$

$$f'(x) \overset{(2)}{=} 2xe^{-x} + (x^2-8)(-e^{-x}) = e^{-x}[2x-x^2+8] = e^{-x}[-x^2+2x+8]$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+32}^{\,6}}{-2} \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}, \text{ innen } f'(x) \overset{(2)}{=} e^{-x}[-(x-4)(x+2)]$$

$-x^2+2x+8$



azaz $f'(x) < 0$ ha $x \in (-\infty, -2)$ itt szig mon csökken (2)
$f'(x) > 0$ ha $x \in (-2, 4)$ itt szig mon nő (4)
$f'(x) < 0$ ha $x \in (4, \infty)$ itt szig mon csökken (2)

Weierstrass második tétele szerint korlátos zárt intervallumon folytonos fv felveszi a maximumát és minimumát, (2) így a $[0,5]$-n biztosan van max és min. Másrészt a vizsgálandó pontok az intervallum szélei és a lokális szélsőértékek. Ennek a fv-nek a $[0,5]$ intervallumon csak 4-ben 0 az első deriváltja így csak itt lehet lok. szé. Innen:

$f(0) = -8$ $\quad f(4) = 8e^{-4}$ $\quad f(5) = 17e^{-5}$

Ezek közül a legkisebb a -8, így 0-ban van a min. Másrészt:

$$8e^{-4} - 17e^{-5} = e^{-5}(8e-17) > 0 \text{ azaz } 8e^{-4} > 17e^{-5} \text{ azaz}$$

4-ben van a maximum. (4)

(5) $y^3+y^2-x^2+2x=-3$ Az $y(x)$ létezik diffható fv. átmegy a $(-1,-1)$
[10] ponton és x_0 egy környezetében kielégíti az implicit egyenletet. Határozzuk meg ezen fv $(-1,-1)$ pontjabeli érintőegyenesének egyenletét! Van-e inflexiója a függvénynek az $x_0=-1$ pontban?

Az érintőegyeneshez: $\Big\backslash \frac{d}{dx}$

$$y^3+y^2-x^2+2x=-3 \quad (3)$$

$$3y^2\cdot y'+2y\,y'-2x+2=0$$

Ebbe behelyettesítve $x_0=-1$ $y(-1)=-1$-et

$$3(-1)^2y'(-1)+2(-1)y'(-1)-2(-1)+2=0 \quad (2)$$

$$y'(1)=-4 \quad (1)$$

Azaz az érintőegyenes egyenlete

$$y_é=y'(-1)(x-(-1))+y(-1)=-4(x+1)-1=-4x-5 \quad (3)$$

Az inflexiós ponthoz a második deriváltra van szükség, azaz

$$3y^2y'+2yy'-2x+2=0 \quad \Big\backslash \frac{d}{dx}$$

$$6y\,y'y'+3y^2y''+2y'y'+2yy''-2=0 \quad (4)$$

Innen behelyettesítve $x_0=-1$, $y(-1)=-1$ $y'(-1)=-4$-et:

$$6(-1)(-4)^2+3(-1)^2y''(-1)+2(-4)^2+2(-1)y''(-1)-2=0$$

$$-96+3y''(-1)+32-2y''(1)-2=0$$

$$y''(-1)=66\neq 0 \quad (2)$$

így nincsen inflexiós pontja itt. (2)