Segédanyag az A3 tárgy második zárthelyi dolgozatához

Sáfár Orsolya

2015. május 13.

1. Ívhossz és vonalmenti integrál

Alapfogalmak: Legyen $r(t)$, ahol $t \in [t_1, t_2]$ egy paraméteresen adott görbe. Ekkor egy $v(r)$ vektor-vektor függvény $r(t)$-n vett vonalintegrálján a következő mennyiséget értjük:

$$\int v(r)dr = \int_{t_1}^{t_2} < v(r(t))|r'(t) > dt,$$

ahol $< | >$ két vektor skalárszorzatát jelöli, $v(r(t))$ jelentése: bele kell helyettesíteni a görbe paraméteres megadását a $v(r)$ függvénybe, $r'(t)$ az $r(t)$ t szerinti deriváltja koordinátánként. Egy $r(t)$ görbe t_1 és t_2 pontjai közti ívhosszán az

$$\int_{t_1}^{t_2} |r'(t)|dt$$

mennyiséget értjük.

Kidolgozott mintapéldák

Számoljuk ki $v(r) = (x^2y.xz, x)$ függvény vonalmenti integrálját az xz síkban lévő origó középpontú 3 sugarú kör mentén! Ekkor a kör egyenlete:

$$x(t) = 3\cos(t)$$

$$y(t) = 0$$

$$z(t) = 3\sin(t),$$

ahol $t \in [0, 2\pi]$. Így az integrál:

$$\int_0^{2\pi} < (0, 9\sin(t)\cos(t), 3\cos(t))|(-3\sin(t), 0, 3\cos(t)) > dt =$$

$$\int_0^{2\pi} 0 + 0 + 9\cos^2(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Számoljuk ki a fenti kör kerületét az ívhossz képlettel! Ívhossz=

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin(t)^2 + 0 + 9\cos(t)^2} dt = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$$

.

További gyakorlófeladatok végeredménnyel.

Számoljuk ki a $v(r) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ függvény vonalmenti integrálját az origó középpontú, egység sugarú kör mentén! (-2π)

2. Felszín és Felületi integrál

Alapfogalmak Nevezetes felületek a gömbfelszín és a hengerfelszín továbbá a sík. Ezek paraméteres egyenletét ismerni kell. Általában is elmondható, hogy a felületeket két paraméterrel adjuk meg. Hogy a henger és a gömbfelület paraméterezését meg tudjuk adni, szükség lesz a gömb- és hengerkoordinátákra.

- Gömbkoordináták

$$\begin{aligned} x(r,\varphi,\theta) &= r\sin(\theta)\cos(\varphi) \qquad r \in \mathbb{R}_0^+ \\ y(r,\varphi,\theta) &= r\sin(\theta)\sin(\varphi) \qquad \varphi \in [0,2\pi] \\ z(r,\varphi,\theta) &= r\cos(\theta) \qquad \theta \in [0,\pi] \\ |J| &= r^2\sin(\theta) \end{aligned}$$

- Hengerkoordináták

$$\begin{aligned} x(r,\varphi,z) &= r\cos(\varphi) \qquad r \in \mathbb{R}_0^+ \\ y(r,\varphi,z) &= r\sin(\varphi) \qquad \varphi \in [0,2\pi] \\ z(r,\varphi,z) &= z, \qquad z \in \mathbb{R} \\ |J| &= r \end{aligned}$$

A gömbfelületet úgy paraméterezhetjük, hogy gömbkoordinátákra áttérve r-t lerögzítjük a gömb sugarának, a felület két paramétere pedig a két szög lesz. Ha nem az egész gömbfelületre van szükségünk, akkor természetesen a paramétertartományt szűkítenünk kell. Például ha a déli félgömbre van szükségünk, azaz $z < 0$, akkor $\varphi \in [0, 2\pi]$ és $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ a megfelelő paraméter tartomány. Ezt könnyen kiszámíthatjuk, ha megvizsgáljuk a paraméteres felírásban $z(r,\varphi,\theta)$ előjelét.

Ha egy felszín paraméteres egyenlete $r(u,v)$, ahol $u \in [u_1, u_2]$ és $v \in [v_1, v_2]$ a paraméterek, akkor ezen felület felszíne az alábbi képlettel számolható ki:

$$\int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} |r'_u \times r'_v| dudv,$$

ahol $|.|$ a vektor hosszát jelenti, $\times$ pedig két vektor vektoriális szorzatát jelöli. Egy $v(r)$ vektor-vektor függvénynek az $r(u,v)$ felszínen vett felszíni integrálján az alábbi mennyiséget értjük:

$$\int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} < v(r(u,v)) | r'_u \times r'_v > dudv.$$

Kidolgozott mintapélda

Számoljuk ki a $v(r) = (xy, yz, xz)$ függvény felületi integrálját az xz síkban lévő origó középpontú, 2 sugarú körlapon, továbbá számoljuk ki ezen körlap felszínét, használva a fenti képletet! A körlap egyenlete:

$$x(t) = t\cos(\varphi)$$

$$y(t) = 0$$

$$z(t) = t\sin(\varphi),$$

ahol $t \in [0,2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

A felületi integrál: $v(r(u,v)) = (0, 0, t^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi))$. Szükségünk van még az $r'_t \times r'_\varphi$ mennyiségre.

$$r'_t \times r'_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ -t\sin(\varphi) & 0 & t\cos\varphi \end{vmatrix} = (0, -t, 0)$$

Így az integrál:

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} < 0, 0, t^2 \sin(t)\cos(t) | (0, -t, 0) > dudv = 0.$$

A felszín:

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} |r'_\varphi \times r'_t| d\varphi dt =$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} t d\varphi dt = 2\pi \frac{2^2}{2} = 4\pi$$

Gyakorló példák végeredményekkel

Számoljuk ki a $v(r) = (x^2, y^2, 0)$ függvény integrálját az egy sugarú, origó középpontú félgömb északi féltekén. $(-\frac{3\pi}{8})$

Számoljuk ki azon r sugarú gömbcikk területét, amelyet a $0°$ és a $90°$ hosszúsági kör határol. $(\frac{r^2\pi}{3})$

3. Gradiens, divergencia, rotáció

Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Ekkor az f függvény

- divergenciája:
  $\langle f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z) | \nabla \rangle = \frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial z}$.
- rotációja: $(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) \times \nabla =$

$$\left(\frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial z}, \frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial z}, \frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial x} \right)$$

Egy függvény gradiense az elsőrendű parciális deriváltjaiból álló mátrix. Speciális esetben ha $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, akkor egy három elemű vektor, méghozzá

$$\mathrm{grad}(f(x,y,z)) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \right)$$

Kidolgozott mintapélda

$$\mathrm{div}(|r|r) = ?$$

$$\mathrm{div}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)) =$$

$$\mathrm{div}(x\sqrt{x^2+y^2+z^2}, y\sqrt{x^2+y^2+z^2}, z\sqrt{x^2+y^2+z^2} =$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - y\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} +$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - z\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}) = 3\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 3|r| - \frac{1}{|r|}$$

Gyakorlófeladatok

- $\mathrm{grad}(|r|) = ?$
- $\mathrm{rot}(|r|r) = ?$

4. Integrálátalakító tételek

Ezen tételek gyakran lehetőséget adnak a számítások egyszerűsítésére. Három tételt vettünk ebben a témakörben:

- **Gauss-Osztogradszkij tétel** Legyen F reguláris zárt felület, V az általa határolt térrész, kifelé mutató normálvektorral, $v(r) : R^3 \to R^3$, $v(r) \in C^1$ (azaz elegendően sima). Ekkor:

$$\iint_F v(r)dF = \iiint_V \mathrm{div} v(r)dV$$

- **Stokes tétel** Legyen F egy reguláris felületdarab, γ pedig az őt határoló zárt görbe F-en, pozitív irányítással, $v(r)$ mint előbb. Ekkor:

$$\oint_\gamma v(r)dr = \iint_F rot(v)dF$$

- **Green-tétel a síkban** Legyen $L(x, y).M(x, y)$ két darab egyszer folytonosan deriválható függvény, γ egy reguláris zárt görbe, a γ által határolt korlátos tartományt jelölje D. Ekkor:

$$\oint_\gamma (Ldx + Mdy) = \int\int_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) \mathrm{d}t$$

  Az $M = \frac{x}{2}$ és az $L = -\frac{y}{2}$ választással ezen tétel alkalmas a D területének meghatározására egy vonalmenti integrál segítségével.

Kidolgozott mintapéldák

a, Demonstráljuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt az alábbi esetben: $v(r) = (x^2 + y^2, y^2 + z^2, x^2 + z^2)$, V pedig az origó középpontú, 3 sugarú gömb.

Megoldás. A felület gömbkoordinátás alakja:

$$r(\varphi, \theta) = \begin{cases} x(\varphi, \theta) &= 3\sin\theta\cos\varphi \\ y(\varphi, \theta) &= 3\sin\theta\sin\varphi \\ z(\varphi, \theta) &= 3\cos\theta \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi]\, \theta \in [0, \pi]$$

$$r'_\varphi \times r'_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3\sin\theta\sin\varphi & 3\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ 3\cos\theta\cos\varphi & 3\cos\theta\sin\varphi & -3\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= (9\sin^2\theta\sin\varphi, 9\sin^2\theta\sin\varphi, -9\sin\theta\cos\theta)$$

$$\oiint_F v(r)\mathrm{d}A =$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\Big\langle(3^2\sin^2\theta, 3^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+3^2\sin^2\theta, 3^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+3^2\sin^2\theta)\Big|$$

$$\Big|(9\sin^2\theta\sin\varphi, 9\sin^2\theta\cos\theta, -9\sin\theta\cos\theta)\Big\rangle \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} 81\sin^4\theta\cos^2\varphi\sin\varphi+81\sin^3\theta\cos\theta\sin^2\varphi+81\sin^3\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi =$$

$$81\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 4\theta}{4}\right)\right]_{\theta=0}^{\pi}\left[\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{2\pi}+$$

$$81\left[\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_{\theta=0}^{\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{\varphi=0}^{2\pi}+81\left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_{\theta=0}^{\pi}=$$

$$=81\left[\frac{3}{8}\right]_{0}^{\pi}\cdot 0+81\cdot 0+0=0$$

Másrészt:

$$\mathrm{div}v = 2x+2y+2z$$

$$\int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}(2\cdot 3\sin\theta\cos\varphi+2\cdot 3\sin\theta\sin\varphi+2\cdot 3\cos\varphi)\sin\theta r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r =$$

$$6\int_{r=0}^{1} r\mathrm{d}r\cdot\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\sin^2\theta\cos\varphi+\sin^2\theta\sin\varphi+\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi =$$

$$\left[3r^2\right]_{r=0}^{1}\cdot\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta+\int_{0}^{2\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta+\right.$$

$$\left.\int_{\varphi=0}1\mathrm{d}\varphi\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\sin\theta}{2}\mathrm{d}\theta\right)=3\left(0+0+2\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\pi}\right)=0$$

b, S: origó középpontú, 2 sugarú északi félgömb, $v(r)=(x+y, \sin y+z, x)$. Demonstráljuk a Stokes-tételt!

$$\mathrm{rot}v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x+y & \sin y+z & x \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix} = (1,1,1)$$

A gömbfelület paraméterezése:

$$x(\varphi,\theta) = 2\sin\theta\cos\varphi$$

$$y(\varphi,\theta) = 2\sin\theta\sin\varphi$$

$$z(\varphi,\theta) = 2\cos\theta,$$

ahol $\varphi \in [0,2\pi], \theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Még meg kell határoznunk a kifelé mutató normálist:

$$r'_\varphi \times r'_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ 2\cos\theta\cos\varphi & 2\cos\theta\sin\varphi & -2\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= (-4\sin^2\theta\cos\varphi, -4\sin^2\theta\sin\varphi, -4\sin\theta\cos\theta)$$

Helyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a befelé mutató normálist sikerült meghatároznunk, ezért amikor beírjuk az integrálban, akkor meg kell szoroznunk -1-el a vektort. Ezek alapján a felületi integrál:

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} < (1,1,1)|(4\sin^2\theta\cos\varphi, 4\sin^2\theta\sin\varphi, 4\sin\theta\cos\theta) > d\varphi d\theta =$$

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 4\sin^2\theta\cos\varphi + 4\sin^2\theta\sin\varphi + 4\sin\theta\cos\theta) > d\varphi d\theta =$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\varphi + \cos\varphi d\varphi \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 2 - 2cos2\theta d\theta + \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1\varphi d\varphi \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\sin\theta d\theta =$$

$$[-\cos\varphi + \sin\varphi]_0^{2\pi} \cdot [2\theta - sin2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [2\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0\frac{\pi}{2} + 2\pi 0 = 0$$

A vonalmenti integrálhoz először a határológörbe paraméteres egyenletét kell felírnunk. Ez itt egy, az xy síkban lévő körvonal, azaz

$$x = 2\cos\varphi$$

$$y = 2\sin\varphi$$

$$z = 0$$

$$\varphi \in [0,2\pi]$$

Ekkor $r(\varphi)'_\varphi = (-2\sin\varphi, 2\cos\varphi, 0)$, így a keresett integrál (a függvényt a görbe pontjaiban kell venni)

$$\int_0^{2\pi} < (2\cos\varphi + 2\sin\varphi, \sin 2\sin\varphi + 0, 2\cos\varphi)|(-2\sin\varphi, 2\cos\varphi, 0) > d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} -4\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi + \sin(2\sin\varphi)2\cos\varphi + 0 d\varphi =$$

$$-4\left[\frac{\cos 2\varphi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2} - \cos(2\sin\varphi)\right]_0^{2\pi} = -4[0+0-0-0] = 0$$

c, Számoljuk ki a derékszögű háromszög területét a Green-tétel területképlete segítségével!

Paraméterezve a három határoló görbeszakaszt (irányítást is figyelembe véve):

$L_1 : x(t) = t, \quad y(t) = 0 \quad t \in [0, a]$

$L_2 : x(t) = a - t, \quad y(t) = \frac{b}{a}t \quad t \in [0, a]$

$L_3 : x(t) = 0, \quad y(t) = t \quad t \in [b, 0]$

Ezek alapján az integrál:

$$\int_0^a 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 dt + \int_0^a -\frac{1}{2}\frac{b}{a}t \cdot -1 + \frac{a-t}{2}\frac{b}{a} dt + \int_b^0 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 dt =$$

$$\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} + at\right]_0^a = \frac{1}{2}ba$$