Gyakorló feladatsor

Kalkulus

1 Lineáris algebra

1. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -6 & -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ egyenletet, majd számítsa ki $\mathbf{A}$ determinánsát és sorrangját! Azt is döntse el, hogy van-e $\mathbf{A}$-nak inverze (ha van, akkor sem kell kiszámolnia, hogy melyik mátrix az)!

2. Tekintse az

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x + y &= 0 \\ -x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert! Hány ismeretlen van? Hány egyenlet? Hány érdemi egyenlet? Megoldható-e ez az egyenletrendszer?

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerhez tartozó $\mathbf{A^T Ax} = \mathbf{A^T b}$ egyenletet a rendszer normál egyenletének nevezzük (mindkét oldalt beszoroztuk $\mathbf{A^T}$-al). Írja fel a normál egyenletet és döntse el, hogy van-e megoldása!

3. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Számítsa ki $\det(\mathbf{A})$-t, $\det(\mathbf{A^T})$-t, $\det(\mathbf{A^{-1}})$-t, $\det(2\mathbf{A})$-t!

2 Sorozatok

4. Bizonyítsa be a definíció szerint, hogy

   a, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-7n+1}{2n^2+2} = \dfrac{1}{2}$

   b, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-n+2}{3n^2+1} = \infty$

5. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékeket!

   a, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4n^4-n^2+7} - 2n^2$

   b, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{2n-1}}{(-3)^{n-1}+4^{n+2}+n^{1001}}$

   c, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\ln(n)+n^n}{7^{-n+1}+2^{n-5}+n!}$

   d, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2-n+1}$

   e, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2n^2+n-1}{n^4+1}}$

   f, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+4}{3n-1}\right)^{2n+1}$

   g, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+4}{n-1}\right)^{3n-1}$

   h, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+4}{3n-1}\right)^{4n}$

   i, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+4}{3n-1}\right)^{7n^2}$

3 Komplex számok

1. Határozza meg az alábbi kifejezések pontos értékét!

   a, $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

   b, $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

   c, $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

   d, $\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

2. Milyen szöget zár be a $(1,-1)$ pontba mutató vektor az x tengely pozitív felével? Milyen távolságra van a pont az origótól?

3. Határozza meg a $\dfrac{5+2i}{3-4i}$ szám algebrai alakját!

4. Hozza algebrai alakba a $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ trigonometrikus alakban adott komplex számot! Mi lesz a szám valós része? Mi lesz a képzetes része? Mi lesz az abszolút értéke? Mi lesz a szám szöge? Mi lesz a konjugáltjának algebrai alakja?

5. Számítsuk ki az $(1+i)^{2018}$ szám algebrai alakját!

6. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

   a, $(1+i)^2z^2+z+i=0$

   b, $9z^2+6z+2=0$

   c, $8z^3=-1$

   d, $z^4+i-\sqrt{3}=0$

   e, $|z|^2+2\overline{z}=1-2i$

4 Határérték, Folytonosság

7. Bizonyítsa be az alábbi határértékeket a megfelelő definíció felhasználásával!

   a, $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{5-x^2}=1$

   b, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-7x}{-x+1}=7$

8. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

   a, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{(x^2-4)^2}$

   b, $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4x+4}{(x^2-4)^2}$

   c, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+4}{(x^2-4)^2}$

   d, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(2x)-1}{\tan(3x)}$

   e, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{|x+1|}{x+1}$

9. Határozza meg az alábbi függvény folytonossági pontjait, szakadási pontjait és azok típusát!

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)\sin(x)}{x} & \text{ha } x<0\\[2ex] \dfrac{2x^2-6x-8}{x^2-4x-5} & \text{ha } x\geq 0\end{cases}$$

5 Deriválás

10. Határozza meg az alábbi függvények deriváltját definíció szerint az $x_0 = 1$ pontban, majd írja fel itt az érintőegyenes egyenletét!

$$f(x) = \sqrt{5 - x^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2 - x}$$

11. Hol deriválható az alábbi függvény? Számítsa ki a deriváltat minden olyan pontban ahol létezik!

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)\sin(x)}{x} & \text{ha } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{2x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4x + 5} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

12. Számítsa ki az alábbi függvények deriváltját!

a, $(x+2)^2\sqrt{3x^3 + x^2}$

b, $(x^4 + \cos^2(2x))^6$

c, $\mathrm{e}^{\sinh(x)}$

d, $\cosh(x)^{\sinh(x)}$

e, $\dfrac{\operatorname{arsinh}(x^2)}{\arccos^2(2x)}$

13. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken! Van-e ezen függvényeknek abszolút szélsőértéke a $[0, 1]$ intervallumon? Ha igen számítsa is ki!

a, $\ln(\sqrt{x^2 - 5x + 6})$

b, $(x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$

c, $x^4 + \dfrac{48}{x}$

14. Mekkora hibát vétünk, ha a $\sinh(0.2)$ értékét a függvény 0 körüli harmadrendű Taylor-polinom helyettesítési értékével közelítjük?

15. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin(x^2)}{\arctan(2x^2)}$

b, $\lim\limits_{x \to \infty} x\,\mathrm{e}^{-2x^2}$

c, $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt[3]{x}\ln(2x)$

d, $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \dfrac{1}{x}\right)$

e, $\lim\limits_{x\to 0+} \cosh(x)^{\frac{1}{\sinh(2x)}}$

f, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{9x} - 2\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{9x} + \mathrm{e}^{-x}}$

g, $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sinh(4x-1)}{\cosh(2x-5)}$

16. Legyen $f(x) = \operatorname{arsinh}(3x-2)$. $D_f = ?$, $R_f = ?$.

    Írja fel az $x = \dfrac{2}{3}$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!

    Indokolja meg, hogy létezik $f^{-1}(x)$! $f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$

6 Integrálás

17. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

    a,
    $$\int \frac{x+3}{4x^2+3}\mathrm{d}x$$

    b,
    $$\int \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+7}}\mathrm{d}x$$

    c,
    $$\int \frac{2x+1}{\sqrt{5-x^2-4x}}\mathrm{d}x$$

    d,
    $$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{(4+\mathrm{e}^{2x})^3}\mathrm{d}x$$

    e,
    $$\int (5x+7)\sinh(x+3)\mathrm{d}x$$

    f,
    $$\int x^7 \ln(3x)\mathrm{d}x$$

18. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a,

$$\int_0^{\pi} \sin^2(2x)\mathrm{d}x$$

b,

$$\int_0^{\pi} \sin^4(x)\cos(x)\mathrm{d}x$$

c,

$$\int_1^{2} |2x-3|\mathrm{d}x$$

19. Számítsa ki az $f(x) = x^2 - 4x$ és az $g(x) = -x^2 + 3$ görbéje közti területet!

20. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a,

$$\int \sqrt{4x^2-1}\mathrm{d}x = ?$$

Az $x = \frac{1}{2}\cosh(t)$ helyettesítéssel számolja ki!

b,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x}+1}\mathrm{d}x = ?$$

Az $\mathrm{e}^x = t$ helyettesítéssel számolja ki!