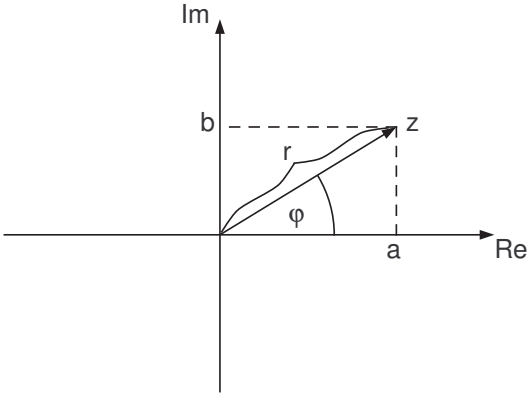
Segédanyag az A3 tárgy második zárthelyi dolgozatához

Sáfár Orsolya

1 Komplex számok fogalma

A komplex számok a valós számok természetes kiterjesztése, annak érdekében, hogy a gyökvonás mûvelete elvégezhetõ legyen a negatív számok körében is. Vegyük tehát hozzá az eddig megszokott valós számokhoz a $\sqrt{-1}$-et, és jelöljük el ezt az új számot i-vel.A komplex számok igazából a valós számok és ezen i valahányszorosának összegei. A komplex számokat legegyszerûbben a komplex számsíkon képzelhetjük el, mint vektorokat. Minden komplex szám megfelel egy az origóból az adott pontba mutató vektornak. A komplex számsík két tengelyét valós, illetve tengelynek nevezzük, egy z komplex szám koordinátáit pedig a komplex szám valós illetve képzetes részének (jelölésük: $\Re z = a$, illetve $\Im z = b$). Ezek alapján minden szám megegyezik a tengelyekre esõ vetületeinek összegével: $z = a + ib$. (Hasonlóan mint ahogy síkvektoroknál megszoktuk az $x\underline{i} + y\underline{j}$ jelölést, ahol $\underline{i}, \underline{j}$ a két tengelyen lévõ egység hosszú vektorok. Itt annyi a különbség, hogy a valós tengely egységvektorának nincs külön jele, a képzetes tengelyé pedig i).



Egy komplex szám origótól vett távolságát nevezzük a szám abszolútértékének (jele r), a valós tengely pozitív felével bezárt szögét pedig a komplex szám szögének (jele: φ). Ezen mennyiség segítségével a fenti $z = a+ib$ alak helyett használhatjuk az

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

trigonometrikus alakot is (mivel $\cos\varphi = \frac{a}{r}, \sin\varphi = \frac{b}{r}$ definíció szerint). Végül a trigonometrikus alakot rövidíthetjük:

$$z = re^{i\varphi}$$

Euler-alakra. Annak indoklása, hogy ez utóbbi két alak ugyanaz, Taylor-sorfejtés segítségével történik. Ugyanis

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}.$$

Figyelembe véve, hogy $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, kapjuk, hogy a fenti sor megegyezik a

$$i\sin z = i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

,

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

sorok összegével.)

2 Alapmûveletek a komplex számok körében

Könnyen értelmezhetjük egy komplex szám és egy valós szám szorzatát, és összegét, legyen $z = a + ib$, $c \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$c + z = (c + a) + ib$$

$$c \cdot z = c \cdot a + ic \cdot b$$

A komplex számok körében értelmezett a négy alapmûvelet. Legyenek $z_1 = a_1 + ib_1$, illetve $z_2 = a_2 + ib_2$ két tetszõleges komplex szám. Ekkor definíció szerint:

$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + ib_1 - a_2 - ib_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + i^2b_1b_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Az osztás kicsit trükkösebb, de ki lehet szedni a nevezõbõl a képzetes számot a következõ trükkel:

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}\cdot\frac{a_2-ib_2}{a_2-ib_2}=\frac{a_1a_2-i^2b_1b_2+-ia_1b_2+ib_1a_2}{{a_2}^2-(ib_2)^2}=$$

$$\frac{a_1a_2+b_1b_2+i(-a_1b_2+b_1a_2)}{{a_2}^2+{b_2}^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{{a_2}^2+{b_2}^2}+i\frac{-a_1b_2+b_1a_2}{{a_2}^2+{b_2}^2}$$

A szorzás és osztás mûvelete sokkal egyszerûbben elvégezhetõ az Euler-alak segítségével, ugyanis:

$$z_1z_2=r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

továbbá

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{\varphi_1-\varphi_2}.$$

A hatványozás és gyökvonást nem szokás $a+ib$ alakban végezni, ugyanis míg a

$$z^n=(a+ib)^n$$

kifejezés csak a binomiáls tétellel bontható ki, addig

$$z^n=(re^{i\varphi})^n=r^ne^{in\varphi}$$

igen könnyen számolható. A gyökvonás pedig nem is végezhetõ el a trigonometrikus vagy Euler-alak nélkül:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}},$$

ahol $k=0,1,\ldots n-1$. Ezt a képletet úgy kell érteni, hogy minden komplex számnak n darab n-edik gyöke van, és ezeket úgy kell kiszámolni, hogy a fenti képletbe be kell helyettesíteni a k értékeket (mind az n darabot), és ami kijön, az az n db n-edik gyök.

Kidolgozott mintapéldák

Végezzük el a kijelölt mûveleteket!

1. $(2+i)(1-i)$
2. $(3+6i)(4+7i)$
3. $\frac{2+3i}{4-2i}$
4. $(1-i)^{25}$
5. $\sqrt[4]{-1}$

Megoldások:

1. $(2+i)(1-i)=2-i^2-2i+i=2+1-i=3-i$

2. $(3+6i)(4+7i) = 12 + 42i^2 + 24i + 21i = -30 + 45i$

3. $\frac{2+3i}{4-2i} = \frac{2+3i}{4-2i} \cdot \frac{4+2i}{4+2i} = \frac{8-6+i(4+12)}{4^2+2^2} = \frac{2+16i}{20} = \frac{1}{10} + i\frac{4}{5}$

4. $(1-i)^{25} = (\sqrt{1^2+1^2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}})^{25} = \sqrt{2}^{25} e^{i\frac{25\cdot\pi\cdot 3}{4}} = \sqrt{2}^{25} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

5. $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1 \cdot e^{i\pi}} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{2k\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{k\pi}{2}}$, azaz $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{\pi}{4}+i\pi}$, $e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{3\pi}{2}}$ a négy keresett gyök.

3 Komplex elemû számsorozatok és számsorok

3.1 A konvergencia definíciója

Komplex számsorozat konvergenciáján ugyanazt kell értenünk, mint valós számsorozatok esetén: az elemek egy bizonyos küszöbindex után egyre közelebb kerülnek a határértékhez (amely egy komplex szám). A távolságot ebben az esetben a két szám különbségének abszolútértékével mérjük. Ebbõl a definícióból következik, hogy egy komplex számsorozat pontosan akkor konvergens, ha az elemeinek valós része és képzetes része is konvergens.

Kidolgozott mintapélda
Mi az alábbi sorozat határértéke?

$$z_n = \frac{n+1}{n^3-3} + i\frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$$

Ebben az esetben külön megvizsgáljuk a valós részt, ami:

$$\frac{n+1}{n^3-1} = \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{3}{n^3}} \to \frac{0+0}{1-0} = 0,$$

illetve a képzetes részt, amire:

$$\frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\sqrt{n}} \to \frac{2-0}{1+0} = 2.$$

Ezek alapján a keresett határérték: $0+2i$.

3.2 A Cauchy-tulajdonság

Hasznos fogalom a számsorozatok vizsgálatánál a Cauchy-sorozat. Akkor mondjuk egy sorozatról, hogy az Cauchy-sorozat, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N(\varepsilon)$, hogy minden $n, m > N(\varepsilon)$ esetén $|z_n - z_m| < \varepsilon$. Magyarán szólva elég nagy indexû tagjai a sorozatnak tetszõlegesen közel vannak egymáshoz. Ha z_n egy komplex számsorozat, akkor a konvergencia ekvivalens a Cauchy-tulajdonsággal, azaz egy sorozat konvergens akkor és csak akkor,

ha Cauchy-sorozat. Ezt a tényt felhasználhatjuk, hogy bebizonyítsuk egy sorozat konvergens vagy divergens voltát.

Kidolgozott mintapélda
Konvergens-e az alábbi sorozat?

$$z_n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

Nem konvergens, mert nem Cauchy. Euler-alakban felírva:

$$z_n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = e^{in}.$$

Ebbõl látszik, hogy a sorozat elemei a komplex egységkörön helyezkednek el, és a szögük fix mennyiséget, 1-et változik minden lépésben (radiánban számolva). Ez azt jelenti, hogy bármely két szomszédos elem távolsága állandó, pozitív mennyiség. Így nem teljesülhet a Cauchy-feltétel olyan ε-ra, amely ennél a fix távolságnál kisebb, emiatt a sorozat nem lehet konvergens.

3.3 0-hoz tartó sorozatok

A konvergencia fenti definíciójából az is következik, hogyha egy z_n sorozat konvergens, és $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, akkor az r_n és φ_n sorozatok is konvergensek, és ha $z_n \to z = re^{i\varphi}$, akkor $r_n \to r$ és $\varphi_n \mathrm{mod} 2\pi \to \varphi$, kivéve, ha $r = 0$. Ha 0-hoz tartó sorozatról van szó, akkor r_n általában könnyen becsülhetõ, és ha $r_n \to 0$, akkor a szöget nem kell vizsgálnunk (ez könnyen belátható pl. a Cauchy-tulajdonság segítségével).

Kidolgozott mintapélda
Konvergens-e az alábbi sozozat?

$$z_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}+4} e^{in}$$

Igen, mert

$$|z_n| = r_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}+4} \to 0,$$

így az egész sozozat tart a 0 (komplex) számhoz.

3.4 Végtelenhez tartó sorozatok

Itt van a legnagyobb különség a valós számoknál megszokott definícióhoz képest. Akkor mondjuk, hogy egy komplex számsorozat tart a végtelenbe, ha az abszolútértéke tart a végtelenbe. A szög itt egyáltalán nem érdekes. Így például míg a valós számoknál a $(-1)^n n$ sorozatot divergensnek neveztük, a komplex számok körében ez a végtelenbe tart. Érdemes úgy gondolni, hogy a komplex számoknál csak egy ∞ van, nem úgy mint a valósoknál, ahol volt $+\infty$ és $-\infty$.

Kidolgozott mintapéldák

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorozatok a végtelenbe tartanak:

a, $z_n = (n^4 - 1)e^{i\sqrt{n+n^2-1}}$

b, $z_n = n^2 - 10n + i(\cos(\sqrt{n - n^3}))$

Megoldások:

a, $r_n = |z_n| = n^4 - 1 \to \infty$, így a definíció alapján $z_n \to \infty$.

b, $r_n = |z_n| = \sqrt{(n^2 - 10n)^2 + (\cos(n - n^3))^2} \geq \sqrt{(n^2 - 10n)^2 + 0} \geq$
$\geq n^2 - 10n \geq^* \frac{1}{2}n^2 \to \infty$, a $\geq^*$ elég nagy n-re teljesül. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a második sorozat is végtelenbe tart.

Gyakorló példák

Vizsgáljuk meg az alábbi komplex elemû sorozatokat konvergencia szempontjából!

a, $z_n = \frac{1}{\sqrt[5]{n}-\sqrt{n}}e^{in}$

b, $z_n = \frac{\sqrt{n}+n}{n-\sqrt{n}} + i\frac{e^n+n!}{3e^n-2(n!)}$

c, $\frac{n^3}{3^n}e^{in}$

d, $\frac{3^n}{n^3}e^{in}$

e, $e^{i\pi n}$

Megoldások:

a, 0-hoz tart

b, 1-$\frac{1}{2}i$-hez tart

c, 0-hoz tart

d, ∞-hez tart

e, nem konvergens, mert nem Cauchy

3.5 Komplex számsorok

A komplex számsorok összegét hasonlóan definiálhatjuk a valós esethez, azaz

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} z_n.$$

Emiatt igaz marad a komplex számsorozatokra kimodott tulajdonság: a részösszegek valós és képzetes része tart az összeg valós illetve képzetes részéhez. Igaz továbbá két fontos tétel, amelyekkel már találkoztunk a valós számoknál is: ha a sor konvergens (létezik az összeg), akkor $z_n \to 0$ (vigyázat, ez fordítva nem igaz, ha $z_n \to 0$, attól még nem feltétlen konvergens a sor).

A másik pedig: ha $|z_n|$-ból képzett sor konvergens, akkor a z_n-ekbõl képzett sor is konvergens, ezt neveztük abszolút konvergenciának. Vigyázat, ez az állítás sem igaz fordítva, $\sum z_n$ konvergenciájából nem következik $\sum |z_n|$ konvergenciája.

Kidolgozott mintapéldák

Konvergensek-e az alábbi végtelen összegek?

a, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + i\frac{1}{3^n}\right)$

b, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{in^2}$

c, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right) + i\frac{n}{n^2+1}\right)$

d, $\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$, ahol z egy tetszõleges komplex szám

a, Konvergens, és ebben az esetben a sorösszeget is meg tudjuk határozni: a valós részé: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$. Ezt az e^x függvény Taylor-sorfejtéséböl tudjuk, ha behelyettesítünk $x = 1$-et. Másrészt a képzetes rész: $\sum_{i=0}^{\infty} = \frac{1}{3^n}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$,a geometriai sor összegképlete miatt. Így kérdezett sorösszeg: $e + i\frac{3}{2}$.

b, Konvergens, mert abszolút konvergens. Ugyanis

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

c, Nem konvergens, mert az általános tag nem tart 0-hoz, mivel

$$|z_n| = \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^2} \to \sqrt{1^2+0^2} = 1 \neq 0$$

d, A válasz most z értékétõl függ. Ha $|z-1|<1$, akkor használhatjuk azt a tételt, amely szerint abszolút konvergens sor konvergens. Tehát ilyen z-kre a sor konvergens. Ha viszont $|z-1|\geq 1$, akkor az általános tag nem tart 0-hoz, mivel az abszolútértéke nem tart 0-hoz (hiszen egy egynél nagyobb szám hatványai a végtelenhez tartanak, míg ha $|z|=1$, akkor z hatványainak abszolútértéke 1). Ezen z-kre tehát a sor divergens.

Összefoglalva: ezen sor konvergenciatartománya, azaz azon z-k halmaza, amelyekre a sor konvergens, az $1+0i$ középpontú, 1 sugarú nyílt körlap.

Gyakorló feladatok Vizsgáljuk meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

a, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9^n}+i\frac{2^n}{3^n}\right)$

b, $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^n+i\frac{1}{n}\right)$

c, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n}{n^3+1}e^{in^2}$

d, $\sum_{n=0}^{\infty}(2z-3i)^n$, ahol z egy tetszõleges komplex szám

Megoldások:

a, a sor konvergens, a sorösszeg $\frac{1}{8}+2i$

b, a sor divergens az általános tag e^3+0i-hez tart, nem 0-hoz

c, a sor konvergens, mert abszolút konvergens

d, a sor konvergenciatartománya a $0+\frac{3}{2}i$ középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú nyílt körlap

4 Komplex számokon értelmezett komplex értékû függvények

4.1 Függvények határértéke

Egy komplex számokon értelmezett komplex függvényt

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

alakban elõállítva a z_0 pontban a függvény határértéke:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{x\to x_0, y\to y_0} u(x,y)+i\lim_{x\to x_0, y\to y_0} v(x,y).$$

Ha egy függvénynek minden pontban létezik határértéke, akkor a függvényt folytonosnak nevezzük. Folytonos függvényekre igaz, hogy a határértékük egy z_0 pontban egyszerûen $f(z_0)$. Ha viszont a függvény nem folytonos

(például 0-val osztás miatt), akkor a kétváltozós függvények tanult módon kell eljárnunk.

A megoldást a legtöbb esetben úgy célszerû kezdeni, hogy felírjuk az $z = x + iy$ összefüggést. Néha célszerû az $f(x, y)$ függvényt is két részre bontani $(u + iv)$, de nem minden esetben.

Általában könnyebb azt belátni, hogy nem létezik a határérték. Erre az az általános módszer, hogy megmutatjuk, hogy a függvény határértéke függ az iránytól, amelybõl közelítjük z_0-t. Viszont ez nem lehetséges, mivel a határérték egyértelmû, azaz ebben az esetben nem létezhet. A másik lehetõség, ha belátjuk, hogy a határérték valamilyen irányból ∞.

Kidolgozott mintapéldák

Határozzuk meg a következõ határértékeket!

a, $\lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z}$

b, $\lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z}$

c, $\lim_{z\to 0} \frac{|z|}{z}$

Megoldások:

a, A kérdéses határérték nem létezik. Legegyszerûbben ezt úgy láthatjuk be, ha megvizsgáljuk, hogy mi történik ha a valós tengely pozitív fele mentén közelítjük meg az origót. Ekkor a keresett határérték a következõ alakot ölti:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

ugyanis $e^0 = 1$, amit egy nagyon kicsi pozitív mennyiséggel osztunk. Mivel van olyan irány, amelybõl nem létezik, így biztos nem létezik a függvény határétéke.

b, Ennek a függvénynek létezik a határértéke az origóban. Alakítsuk át a függvényt!

$$\lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{x^2 + y^2}{x + iy} = \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{x^2 + y^2}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} =$$

$$= \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{(x^2 + y^2)(x - iy)}{x^2 + y^2} = x - iy,$$

aminek a határértéke az origóban $0 + 0i$.

c, Ezen függvénynek nem létezik határtértéke az origóban, mert

$$\lim_{z\to 0} \frac{|z|}{z} = \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + iy} = \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} =$$

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}(x-iy)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{x-iy}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

az utolsó alakot felhasználva közelítsük az origót a valós illetve a képzetes tengely pozitív fele mentén. Elsõ esetben $x \to 0+$, $y = 0$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sqrt{x^2}} + i\frac{0}{\sqrt{x^2}} = 1.$$

A második esetben $x = 0$, $y \to 0+$:

$$\lim_{y\to 0+} \frac{0}{\sqrt{y^2}} + i\frac{-y}{\sqrt{y^2}} = -i.$$

Mivel $1 \neq -i$, így a határérték függ a közelítés irányától, ami nem lehetséges. Így beláttuk, hogy a függvénynek nem létezik határértéke az origóban.

Gyakorló feladatok

a, $\lim_{z\to 0} \frac{|z|^4}{z^2}$

b, $\lim_{z\to 0} \frac{1}{|z|}$

c, Számoljuk ki a fenti c, feladatban a tengelyeken negatív irányból közelítés esetén a határértéket.

Megoldások:

a, 0

b, nem létezik

c, -1 illetve i

4.2 A komplex derivált fogalma, Cauchy–Riemann egyenletek, harmonikus függvények

A komplex függvények adott pontbeli deriválhatóságához két dolog kell (ez egy szükséges és elégséges feltétel): egyrészt az $u(x, y)$ és $v(x, y)$ mint valós kétváltozós függvények totálisan deriválhatóak legyenek, másrészrõl teljesíteniük kell a Cauchy–Riemann egyenleteket:

$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y)$$

$$u'_y(x,y) = -v'_x(x,y)$$

Ha egy függvény egy pont kis környezetében mindenütt deriválható, akkor regulárisnak nevezzük az adott pontban.

A Cauchy–Riemann egyenletekbõl következik, hogyha egy komplex függvény deriválható, akkor a valós és képzetes része is harmonikus, azaz

$$u"_{xx}(x,y) + u"_{yy}(x,y) = 0$$

$$v"_{xx}(x,y) + v"_{yy}(x,y) = 0.$$

Egy $u(x,y)$ harmonikus függvény harmonikus társának nevezzük azt a $v(x,y)$ függvényt, amivel együtt kielégíti a Cauchy–Riemann egyenleteket. Ennek meghatározásához magukat az egyenleteket kell felhasználnunk.

Kidolgozott mintapéldák

a, Milyen c esetén reguláris az $f(x,y) = c(2x-3y) + i(6x+4y)$ függvény?

b, Lehet-e $x^3 - y$ egy reguláris függvény valós része?

c, Bizonyítsuk be, hogy a $u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + 5x - 2y$ függvény harmonikus, és keressük meg a harmonikus társát!

a, Akkor reguláris, ha valós deriválható (ami itt teljesül), továbbá eleget tesz a Cauchy–Riemann egyenleteknek, azaz $c(2x-3y)'_x = (6x+4y)'_y$, és $c(2x-3y)'_y = -(6x+4y)'_x$. Elvégezve a deriválásokat, kapjuk: $2c = 4$, illetve $-3c = -6$. Ezek alapján az egyetlen megoldás $c = 2$.

b, Csakis akkor lehet, ha harmonikus, azaz $(x^3-y)''_{xx} + (x^3-y)''_{yy}$-nek kell 0-nak lennie. Viszont elvégezve a deriválásokat $6x$-et kapunk, ami nem azonosan 0, így ez nem lehet egy egész síkon reguláris függvény valós része (egyébként képzetes része sem).

c, Mivel $(2x^3-6xy^2+5x-2y)''_{xx} + (2x^3-6xy^2+5x-2y)''_{yy} = 12x - 12x = 0$, így ez a függvény harmonikus. Jelöljük a harmonikus társát $v(x,y)$-al. Ekkor teljesülnie kell, hogy $u'_x = v'_y$, és $u'_y = -v'_x$, azaz:

$$(2x^3 - 6xy^2 + 5x - 2y)'_x = 6x^2 - 6y^2 + 5 = v'_y(x,y)$$

$$(2x^3 - 6xy^2 + 5x - 2y)'_y = -12xy - 2 = -v'_x.$$

Ezen egyenletekbõl a megfelelõ változó szerinti integrálással kapjuk:

$$v(x,y) = \int 6x^2 - 6y^2 + 5dy = 6x^2y - 2y^3 + 5y + c_1(x)$$

$$v(x,y) = \int 12xy + 2dx = 6x^2y + 2x + c_2(y).$$

$c_1(x)$ egy olyan konstanst jelöl, amely még függhet x-tõl, de y-tól már nem. Ez azért jelenik meg, mert ha $v(x, y)$-t y szerint deriváljuk, akkor azon tagok, amelyek csak x-tõl függnek eltûnnek, és õket nem hozza vissza az y szerinti integrálás. A két egyenletet összevetve kapjuk: $v(x, y) = 6x^2y - 2y^3 + 5y + 2x + c$, ahol a c ténylegesen konstans, nem függ egyik változótól sem.

Gyakorló feladatok

a, Milyen c esetén lesz reguláris a $c(x - y) + i(x^2 + y)$ függvény?

b, Milyen c esetén lesz reguláris a $3c(2yx - y) + i(cx + cy^2)$ függvény?

c, Lehet-e az $u(x, y) = 3x^2y - y^3$ egy reguláris függvény képzetes része? Ha igen, határozzuk meg a harmonikus társát.

Megoldások:

a, semmilyen c-re sem

b, minden c-re

c, igen, a harmonikus társa: $3xy^2 - x^3 + c$.

4.3 Elemi függvények kiterjesztése, azonosságok

Az elemi függvények közül legkönnyebben az exponenciális függvényt tudjuk komplex számokra értelmezni az Euler-alak segítségével:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

A függvény definíciójából következõ tulajdonságai:

- reguláris az egész komplex számsíkon
- $(e^z)' = e^z$
- $e^z \neq 0$, semmilyen z-re, de minden más értéket felvesz (pl. negatív valós számokat is)
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

A trigonometrikus és hiperbolikus függvények definíciója:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

Ezen definíciókból következnek az alábbi tulajdonságok:

- valamennyi függvény reguláris az egész komplex számsíkon
- $\sin(z)' = \cos(z)$
- $\cos(z)' = -\sin(z)$
- $\sinh(z)' = \cosh(z)$
- $\cosh(z)' = \sinh(z)$
- $\boxed{\sin(iz) = i\sinh(z)}$
- $\boxed{\cos(iz) = \cosh(z)}$
- $\sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$
- $\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$
- $\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$
- $\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1$

A logaritmus függvény: egy szám logaritmusa a komplex számok körében sajnos nem egyértelmû. Mi lenne például $\ln(1)$ komplex értelemben? Minden olyan szám, amelyre $e^{\ln(1)} = 1$. Na de ilyen számból végtelen sok van, hiszen minden $i2k\pi$ alakú szám jó, ahol $k \in \mathbb{Z}$ tetszõleges. Ennek oka az, hogy a komplex számok szöge csak mod2π egyértelmû. Ezért a logaritmust komplex értelemben a következõképpen kell definiálni:

$$\ln(z) = \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \qquad \text{ha } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

ahol $k \in \mathbb{Z}$ tetszõleges. Ez azt jelenti, hogy a nempozitív valós számoknak nem értelmezett a logaritmusa (ez késõbb amúgyis gondot okozna).

Ezen definícióval elveszik a logaritmus azonosságainak nagy része. Mindig legyünk óvatosak, ha logaritmus függvényt kell átalakítani!

Kidolgozott mintapéldák

a, Bizonyítsuk be a definíció alapján, hogy $\sin(iz) = i\sinh(z)$.

b, Bizonyítsuk be a regularitás felhasználása nélkül, hogy $\cos(z)$ valós része harmonikus.

c, Bizonyítsuk be, hogy $|\sin(x+iy)| = \sqrt{\sin^2(x) + \sinh^2(y)}$

d, Bizonyítsuk be, hogy $\sin(z)$ nem korlátos.

e, Igaz-e, hogy $\ln(z^2) = 2\ln(z)$?

f, Hozzuk $x+iy$ alakra: $\sin(3+4i)$

g, $\tan(1+i) = ?$

h, $\ln(10i) = ?$

i, Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében: $\sin(z) = 5$.

j, $\cosh(iz) = 3$

k, $e^z = -1 + i$

Megoldások

a, $\sin(iz) = \frac{e^{iiz} - e^{-iiz}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = -i\frac{e^{-z} - e^{z}}{2} = i\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i\sinh(z)$

b, $\Re(\cos(z)) = \cos(x)\cosh(y)$ alapján, $(\cos(x)\cosh(y))''_{xx} + (\cos(x)\cosh(y))''_{yy} = -\cos(x)\cosh(y) + \cos(x)\cosh(y) = 0$, azaz a függvény harmonikus.

c,

$$|\sin(x+iy)| = \sqrt{(\sin(x)\cosh(y))^2 + (\cos(x)\sinh(y))^2} =$$
$$\sqrt{\sin(x)^2\cosh(y)^2 + (1-\sin(x))^2\sinh(y)^2} =$$
$$\sqrt{\sin(x)^2\cosh(y)^2 + \sinh(y)^2 - \sin^2(x)\sinh(y)^2} =$$
$$\sqrt{\sin(x)^2(\cosh(y)^2 - \sinh(y)^2) + \sinh(y)^2} =$$
$$\sqrt{\sin^2(x) + \sinh^2(y)}$$

d, Az elõzõ feladat eredményét felhasználva láthatjuk, hogy a $\sin(z)$ függvény abszolútértéke a szám komplex részétõl egy végtelenbe tartó módon függ, ha y tart a végtelenbe, így nem lehet korlátos.

e, Ez nem igaz, mivel definíció szerint

$$\ln(z^2) = \ln(r^2 e^{i2\varphi}) = \ln(r^2) + i(2\varphi + 2k\pi) = 2\ln(r) + i(2\varphi + 2k\pi)$$

$$2\ln(z) = 2(\ln(re^{i\varphi})) = 2(\ln(r) + i(\varphi + 2k\pi)) = 2\ln(r) + i(2\varphi + 4k\pi)$$

f, $\sin(3+4i) = \sin(3)\cosh(4) + i\cos(3)\sinh(4)$

g,

$$\tan(-1+i) = \frac{\sin(-1)\cosh(1) + i\cos(-1)\sinh(1)}{\cos(-1)\cosh(1) - i\sin(-1)\sinh(1)} =$$
$$\frac{-\sin(1)\cosh(1) + i\cos(1)\sinh(1)}{\cos(1)\cosh(1) + i\sin(1)\sinh(1)} =$$
$$\frac{-\sin(1)\cosh(1) + i\cos(1)\sinh(1)}{\cos(1)\cosh(1) + i\sin(1)\sinh(1)} \cdot \frac{\cos(1)\cosh(1) - i\sin(1)\sinh(1)}{\cos(1)\cosh(1) - i\sin(1)\sinh(1)} =$$

$$\frac{-\sin(1)\cos(1)\cosh(1)^2+\sin(1)\cos(1)\sinh(1)^2}{\cos(1)^2\cosh(1)^2+\sin(1)^2\sinh(1)^2}+$$

$$+i\frac{(\cos(1)^2\cosh(1)\sinh(1))+\sin(1)^2\cosh(1)\sinh(1)}{\cos(1)^2\cosh(1)^2+\sin(1)^2\sinh(1)^2}=$$

$$-\sin(1)\cos(1)+i\sinh(1)\cosh(1)$$

h, $\ln(10i)=\ln(10)+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$

i, $\sin(z)=5$ megoldásához írjuk át a sin-t!

$$\sin(x+iy)=\sin(x)+\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)=5+0i,$$

ami két egyenlet:

$$\sin(x)\cosh(y)=5$$

$$\cos(x)\sinh(y)=0$$

A második egyenlet miatt vagy $\cos(x)$ vagy $\sinh(y)=0$. Ha ez utóbbi lenne, akkor $y=0$ miatt $\cosh(y)=\cosh(0)=1$ miatt $\sin(x)=5$ kéne legyen, de ez a valós számok körében ellentmondás. Emiatt csak $\cos(x)=0$ lehet.

Ekkor $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, ami miatt $\sin(x)=\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)=1$ vagy -1 k paritásától függõen. De ha -1 lenne akkor az elsõ szorzat csak úgy lehetne 5, ha $\cosh(y)=-5$ lenne, ami ellentmondás a valós számok körében, így $\cos(x)=1$ lehet csak, azaz $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Emiatt az elsõ egyenletbõl $y=\operatorname{arcosh}(5)$.

j, $\cosh(iz)=\cos(iiz)=\cos(-z)$. Azaz $-z=x+y$-re kell megoldanunk egy teljesen hasonló egyenletrendszert, jelesül:

$$\cos(x)\cosh(y)=3$$

$$\sin(x)\sinh(y)=0$$

Az $\sinh(y)=0$ itt is ellentmondáshoz vezet, mert akkor $\cos(x)=3$ kéne legyen, így itt is $\sin(x)=0$ miatt $x=k\pi$. Hasonlóan a fenti esethez, $\cos(x)$ csak $+1$ lehet a $\cosh(y)$ miatt, így x-re $2k\pi$ adódik, y-ra pedig areacosh(3). Így az egyenlet megoldásai a $-2k\pi-\operatorname{arcosh}(3)$ alakú számok.

k, $e^z=-1+i$, mindkét oldal logaritmusát véve: $z=\ln(-1+i)=\ln(\sqrt{2})+i(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)$.

4.4 A komplex vonalintegrál

Egy $f(z)$ komplex értékû függvény az L irányított görbe menti integrálján a következõ mennyiséget értjük:

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\dot{z}(t)\mathrm{d}t,$$

ahol a $z(t)$ az L görbe paraméterezése t_1 kezdõponttal és t_2 végponttal, $f(z(t))$ pedig azt jelenti, hogy az $f(z)$ függvény változója helyébe be kell írnunk a görbe paraméteres egyenletét (ez a függvény lokalizáltja).

Az alábbi görbék paraméterezését kell mindenképpen ismernünk:

A z_1 kezdõpontú, z_2 végpontú irányított szakasz paraméteres egyenlete: $z(t) = (z_2 - z_1)t + z_1, \quad t \in [0, 1]$. Ezt kell majd behelyettesíteni a függvénybe, illetve $\dot{z}(t) = z_2 - z_1$, ezzel kell majd a függvény lokalizáltját szorozni.

Az origó középpontú, r_0 sugarú teljes körvonal paraméteres alakja (pozitív irányítással): $z(t) = r_0 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$. Ennek a deriváltja t szerint: $r_0 i e^{it}$.

Amennyiben az integrálandó $f(z)$ függvény reguláris, akkor az z_1 kezdõpontú, z_2 végpontú irányított L görbe mentén vett integráljának kiszámításakor használhatjuk a Newton-Leibniz formulát. A formula szerint ha $F'(z) = f(z)$, (azaz az integrandus primitív függvénye F), akkor

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1)$$

Nem reguláris függvény esetén viszont csak a paraméterezéssel tudjuk meghatározni az intgrált.

Kidolgozott mintapélda

Számoljuk ki az $\int_L f(z)\mathrm{d}z$ integrált, ha

a, L: origó középpontú, 2 sugarú, elsõ síknegyedbe esõ negyedkörív, $f(z) = \bar{z}$

b, L: az 2 pontból az $2i$ pontba mutató szakasz, $f(z) = \bar{z}$

c, L origó középpontú, 2 sugarú, elsõ síknegyedbe esõ negyedkörív, $f(z) = \sin(z)$

d, L: az 2 pontból az $2i$ pontba mutató szakasz, $f(z) = \sin(z)$

Megoldások:

a, Jelen esetben mivel $\bar{z}$ nem reguláris, ezért csak paraméterezéssel dolgozhatunk. Ekkor $z(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, továbbá $f(z(t)) = \bar{z(t)} = \bar{2e^{it}} = 2e^{-it}$ így

$$\int_L f(z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{-it} 2ie^{it} dt = [4it]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi i.$$

b, Most $z(t) = (2i-2)t+2$, $t \in [0,1]$, továbbá $f(z(t)) = z(\bar{t}) = (2i-\bar{2})t+2 = (-2i-2)t+2$ így

$$\int_L f(z)dz = \int_0^1 ((-2i-2)t+2)(2i-2)\mathrm{d}t = -2(2i-2)\left[(i+1)t^2/2 - t\right]_0^1 = 4i$$

Érdemes megfigyelni, hogy noha a két görbe kezdõ és végpontja azonos, az integrálok értéke mégis különbözik (nem reguláris függvényekre nem érvényes a Newton-Leibniz formula).

c, Mivel most $f(z) = \sin(z)$ reguláris függvény, ezért

$$\int_L \sin(z)dz = [-\cos(z)]_2^{2i} = \cos(2i) - \cos(2) = \cosh(2) - cos(2)$$

d, Mivel reguláris függvény esetén az integrál értéke nem függ a görbe alakjától, csak a kezdõ és végpontjától, ezért most is az elõzõ eredményt kapjuk.

Elõadáson szerepelt a Newton-Leibniz formula triviális következménye Cauchy-Goursat tétel néven: ha $f(z)$ reguláris fügvvény, akkor az õ zárt görbe menti integrálja nulla (zárt görbe azt jelenti, hogy a kezdõpontja megegyezik a végpontjával).

Ha a függvény nem reguláris, egy speciális esetben mégis ki tudjuk számolni az integrálját. Erre valóak a Cauchy integrálformulák, amely szerint ha L egy egyszerû zárt görbe amely egyszer kerüli meg pozitív irányítással a z_0 pontot, akkor

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$$

illetve

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

példák jönnek késõbb

4.5 A Laurent-sorfejtés

Egy $f(z)$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény z_0 körüli Laurent-során a következõ végtelen összeget értjük:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

Ez egy két irányban végtelen összeg, két részre bontva kapjuk a pozitív hatványkitevõket tartalmazó részt (reguláris rész), illetve a negatív kitevõket tartalmazó részt (fõrész).

Ezen Laurent-sorról ismert, hogy egy körgyûrû belsejében abszolút konvergens, külsõ pontokban pedig divergens. A körgyûrû belsõ sugarát r-el, a külsõ sugarát R-el jelöljük, és az alábbi képlettel számíthatjuk ki:

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \qquad \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Ha a függvény reguláris a z_0 középpontú R sugarú kör belsejében, akkor ott a Laurent-sora megegyezik a Taylor-sorával. Általában ezt a tényt használjuk a Laurent-sor kiszámításához, de ehhez ismerni kell a nevezetes függvények Taylor-sorát, ezek a következõk:

$f(x)$	0 körüli Taylor-sor
$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}(x^{2k+1})$
$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}(x^{2k})$
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$
n-edfokú polinom	önmaga
$\sinh(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$
$\cosh(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Illetve általános esetben a Taylor-sorban (ami ugyanaz mint a Laurent-sor reguláris része) az a_n együttható képlete:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Laurent sor együtthatóinak ismerete segít az alábbi problémák megoldásában:

1. Milyen típusú szingularitása van a függvénynek a 0-ban?

2. Bizonyos típusú integrálok kiszámítása

3. függvények magasabbrendû deriváltjának meghatározása

Az $f(z)$ függvénynek izolát szingularitása van z_0-ban, ha z_0-ban nem reguláris ugyan (pl mert nem értelmezett 0-val osztás miatt), de van z_0-nak egy olyan kis környezete (azaz z_0 középpontú kis sugarú pontozott (azaz z_0-t kiveszem a körlapból, a többi pont marad) körlap amiben reguláris). Ezen izolált szingularitás három típusú lehet:

1. A függvénynek megszüntethetõ szakadása van z_0-ban, ha létezik a $\lim_{z\to z_0} f(z)$ határérték. Ez a Laurent-sorból onnan látszik, hogy minden $a_{-n} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ (azaz a fõrész 0).

2. A függvénynek k-edrendû pólusa van z_0-ban, ha $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ alakban felírható, ahol $g(z)$ reguláris z_0-ban, és ott nem 0. Ez a Laurent-sorból úgy állápítható meg, hogy a negatív indexû tagok közül (a fõrészben) van egy legutolsó (a k-adik) ami $\neq 0$ a nagyobb indexûek már mind 0-k.

3. Minden egyéb esetben lényeges szingularitása van a függvénynek, ekkor a Laurent-sorban végtelen sok $\neq 0$ negatív indexû tag van.

Az integrálok kiszámításához, pedig azt a tétel használhatjuk fel, hogy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

ahol az L görbe a körgyûrû belsejében haladva egyszer kerüli meg pozitív irányból a z_0-t.

Kidolgozott mintapélda

Számítsuk ki az alábbi függvények Laurent sorát a megadott z_0 körül! Hol lesz konvergens a sor? Állapítsuk meg a sor együtthatóiból, hogy van-e $f(z)$-nek szingularitása z_0-ban, és ha igen, akkor milyen típusú?

a, $f(z) = \frac{1}{1+z}$, $z_0 = 0$

b, $f(z) = \frac{1}{1+z}$, $z_0 = 1$

c, $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$, $z_0 = 0$

d, $f(z) = \ln(1+z)$, $z_0 = 1$

e, $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^4}$, $z_0 = 0$

a, Ebben az esetben egy geometria sor sorösszegére hasonlít a függvényük, így

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

ekkor $a_n = (-1)^n$ ha n pozitív, $a_{-n} = 0$. Emiatt csak megszüntethetõ szakadás lehetne, de mivel ez a függvény reguláris függvények hányadosa, és a nevezõ $z = 1$-ben nem 0, így még az sincs, a függvény reguláris $z_0 = 0$-ban. Konvergenciatartomány:

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0$$

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

ezért a Laurent-sor (ami egyben Taylor-sor is, hiszen a függvény reguláris z_0-ban) a 0 körüli egy sugarú körlapon konvergens.

b, Azt szeretnénk, hogy a hatványsor ne z, hanem $z-1$ hatványai szerint haladjon, ezért átalakítjuk a függvényünket:

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{(-2)}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z-1}{(-2)}^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}^n\right)(z-1)^n$$

itt szintén

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0$$

illetve

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 1,$$

Így a Laurent-sor az 1 körüli, kettõ sugarú körlapon lesz konvergens, a fv pedig reguláris z_0-ban.

c, Felhasználva az e^x Taylor-sorát

$$\frac{e^z-1}{z} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k\right)-1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}z^n$$

emiatt a függvénynek megszüntethetõ szakadása van 0-ban, hiszen nincsen negatív hatványkitevõs tag. A konvergenciasugár pedig:

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0$$

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)!}} = 0,$$

emiatt a Laurent-sor az egész komplex számsíkon konvergens.

d, Ezen Laurent-sor legegyszerûbben deriválással határozhatjuk meg:

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

ekkor integrálva mindkét oldalt

$$f(z) = f(z_0) + \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

$f(z)$ reguláris 0-ban, hiszen reguláris függvények hányadosa, a nevezõ pedig nem 0. A konvergeciasugarak:

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0$$

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

így a 0 körüli 1 sugarú körlapon konvergens a Laurent-sor.

e, Felhasználva a $\cos(z)$ Taylor-sorát:

$$\frac{\cos(z)-1}{z^4} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k}\right)-1}{z^4} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k-4} = -\frac{z^{-2}}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\dots$$

azaz $f(z)$-nek másodredû pólusa van a 0-ban. Itt mivel csak egy darab nemnulla tag van az a_{-n}-nek között, ezért:

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = 0$$

illetve

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+4)!}} = 0,$$

így a Laurent-sor konvergens lesz a 0 kivételével a teljes komplex számsíkon.

4.6 Residuum-tétel

A Laurent-sorban az $\frac{1}{z}$ tag együtthatóját, azaz a_{-1}-et nevezzük a függvény z_0 pontbeli residuumának, és $Res(z_0)$-al jelöljük. A residuum-tétel azt mondja ki, hogyha egy L pozitív irányítású egyszerû görbe körbevesz végessok izolált szingularitást $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$, akkor

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i(Res(z_1) + Res(z_2) + \cdots + Res(z_k))$$

Ez nem más, mint a Cauhy-tétel általánosítása.

A residuumot kiszámíthatjuk a Laurent-sor együtthatójából, illetve

1. ha a függvény reguláris vagy megszüntethetõ szakadása van z_0-ban, akkor
$$Res(z_0) = 0$$
.

2. ha $f(z)$-nek elsõrendû pólusa van z_0-ban, akkor
$$Res(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - zo) f(z)$$

3. ha $f(z)$-nek k-adrendû rendû pólusa van z_0-ban, akkor
$$Res(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} ((z - zo)^k f(z))^{(k-1)}$$

4. ha $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, ahol $g(z), h(z)$ regulárisak, $g(z_0) \neq 0$, $h'(z_0) \neq 0$, akkor
$$Res(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$
.