1. Ha $z_1 = 3 - 2i$ és $z_2 = 2 + i$, akkor

$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{3+2i}{2-i} = \frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+4i-2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

2. *a*) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i,$

b) $\dfrac{2+i}{i(1-4i)} = \dfrac{2+i}{4+i} = \dfrac{(2+i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \dfrac{8+4i-2i+1}{17} = \dfrac{9}{17} + \dfrac{2}{17}i.$

3. *a*) $\sqrt{6} - \sqrt{2}i = \sqrt{6+2}\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}i\right) = \sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{8}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

b) $-4i = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, *c*) $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$.

4. *a*) $1 = \cos 0 + i\sin 0$, tehát a 3 harmadik gyök

$$\cos 0 + i\sin 0 = 1, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$ és $\sqrt[4]{16} = 2$, tehát a 4 negyedik gyök:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \qquad 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,$$

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \quad 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

c) $1 + i\sqrt{3} = \sqrt{1+3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, tehát a harmadik gyökök:

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right), \quad \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right), \quad \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$$

5. *a*) $(1+i\sqrt{3})^3 = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^3 = 8\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -8.$

b) $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, így $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}\right) = 16.$

c) $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, így $(1-i)^4 = (\sqrt{2})^4\left(\cos 7\pi + i\sin 7\pi\right) = -4.$

6. *a*) $z^3 = 1 + i$ egyenlet megoldásai $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ harmadik gyökei, vagyis

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right), \quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

b) $z = a + bi$ algebrai alakból az $\sqrt{a^2+b^2} - a - bi = 1 + 2i$ egyenletet kapjuk. A két oldal képzetes része megegyezik, vagyis $b = -2$. Emiatt a valós részekre $\sqrt{a^2+4} - a = 1$ adódik, vagyis $a^2 + 4 = a^2 + 2a + 1$, így $a = \frac{3}{2}$, vagyis a megoldás $z = \frac{3}{2} - 2i$.
c) $z = a + bi$ algebrai alakból $a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$, vagyis $2ab = -b$, tehát $b = 0$ vagy $a = -\frac{1}{2}$. Ha $b = 0$, akkor $a^2 = a$, tehát $a = 0$ vagy $a = 1$. Ha $a = -\frac{1}{2}$, akkor a valós részekre az $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$ adódik, így $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az egyenlet megoldásai: $0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. *b)* $(1+i)^8 = 16$, tehát $iz^3 = 8$, így $z^3 = -8i = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, vagyis a megoldások a harmadik gyökök:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$
$$2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i,$$
$$2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

8. $\dfrac{7i+3}{7-3i} = \dfrac{i(7-3i)}{7-3i} = i$, vagyis $iz^4 = -8(\sqrt{3}+i)$, tehát

$$z^4 = 8(\sqrt{3}i - 1) = 8\cdot 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

így a megoldások:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i, \qquad 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i, \quad 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

9. $z + \dfrac{1}{z} = a + bi + \dfrac{a - bi}{a^2+b^2}$ képzetes része

$$b - \frac{b}{a^2+b^2} = b\left(1 - \frac{1}{a^2+b^2}\right) = 0.$$

Mivel $b \neq 0$, így $1 - \dfrac{1}{a^2+b^2} = 0$, azaz $a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$.