Richardson-módszer

Richardson-módszer

Definíció: Richardson-iteráció
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldása relaxációval,
$\mathbf{A} = \mathbf{P} - \mathbf{N}$ alkalmas $\mathbf{N}$ és $\mathbf{P}$ mátrixokkal, ahol $\mathbf{P}$ invertálható

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{x_k} + \alpha_k \mathbf{P}^{-1}\mathbf{r_k}$$

ahol $\mathbf{r_k} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax_k}$. $\alpha_k = \alpha$ esetén állandó Richardson-iterációról beszélünk. Jelölés: $\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$.
Tétel: Bármely $\mathbf{P}$ invertálható mátrix esetén az állandó Richardson-iteráció konvergens, ha

$$\frac{2Re\lambda_i}{\alpha|\lambda_i|^2} > 1 \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

ahol $\lambda_i \in \mathbb{C}$ a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei.

Állandó Richardson-módszer

Tétel: Ha az előző feltételek mellett $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$-nak pozitív valós sajátértékei vannak, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$, akkor az állandó Richardson-módszer konvergens, ha $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1}$. Továbbá $\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$ jelöléssel $\mathbf{R}_\alpha$ spektrálsugara $\alpha = \alpha_{opt}$ esetén minimális, és ekkor $\min_\alpha[\rho(\mathbf{R}_\alpha)] = \frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}$.

Állandó Richardson-módszer

Következmény: Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, pozitív definit, sajátértékei $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$, $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ és $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1}$, akkor

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|_{\mathbf{A}} \leq \rho(\mathbf{R}_\alpha) \|\mathbf{e}_k\|_{\mathbf{A}}, \quad k \geq 0$$

ahol $\|\mathbf{e}_k\|_{\mathbf{A}} = \left\|\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{e}_k\right\|_2$. Ez fennáll akkor is, ha $\mathbf{P} \neq \mathbf{I}$ és $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$ szimmetrikus pozitív definit.

ILU

Definíció: A Richardson-módszer P mátrixát $\mathbf{P} = \mathbf{L}_{in}\mathbf{U}_{in}$ módon határozzuk meg, ahol $\mathbf{L}_{in}$ és $\mathbf{U}_{in}$ az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbotásának közelítése. Ennek két változata is van: ILU(0) és ILU(p). Lényege: az $\mathbf{R} = \mathbf{A} - \mathbf{L}_{in}\mathbf{U}_{in}$ mátrix $r_{i,j}$ elemére teljesül, hogy $r_{i,j} = 0$, ha $a_{i,j} \neq 0$.

ILU(0) algoritmusa

```
[n,m]=size(A);
if n≠m, error('Csak négyzetes mátrix jó'); end
for k=1:n-1
    for i=k+1:n
        if A(i,k)≠0
            if A(k,k)==0, error('0 a főátlóban'); end
            A(i,k)=A(i,k)/A(k,k);
            for j=k+1:n
                if A(i,j)≠0
                    A(i,j)=A(i,j)-A(i,k)*A(k,j);
                end
            end
        end
    end
end
```

A Richardson-módszer kapcsolata a gradiens módszerrel

A Richardson-iteráció α_k paraméterei meghatározhatók a gradiens függvénnyel:

$$\phi(\mathbf{x}_{k+1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{r}_k)^T \mathbf{A}(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{r}_k) - (\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{r}_k)^T \mathbf{b}$$

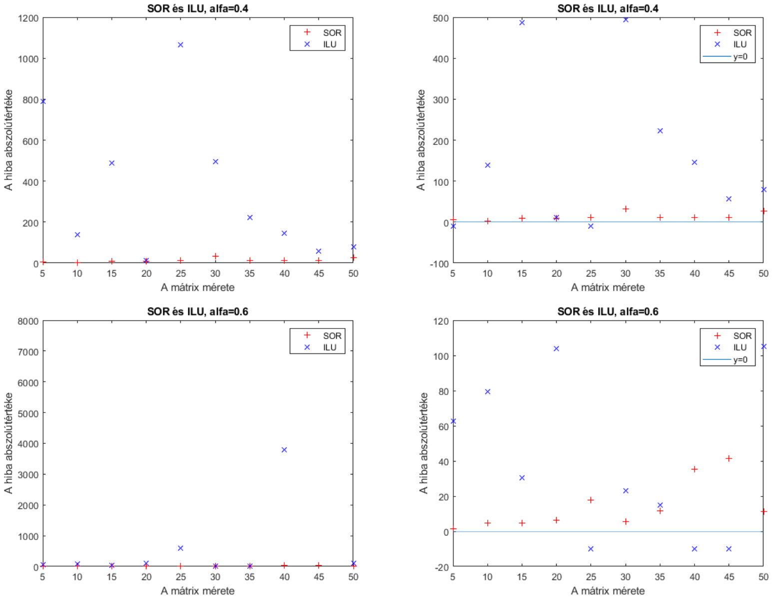
ezt α szerint deriválva, majd 0-val egyenlővé téve azt kapjuk, hogy $\alpha = \frac{\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T}{\mathbf{r}_k \mathbf{A} \mathbf{r}_k^T}$. A nem állandó, $\mathbf{P} \neq \mathbf{I}$ esete a Richardson-módszernek a gradiens módszer.

Gradiens módszer algoritmusa

$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0, k = 0, 1, \ldots$ konvergenciáig

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{A} \mathbf{r}_k} \\
\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{r}_k \\
\mathbf{r}_{k+1} &= \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A} \mathbf{r}_k
\end{aligned}$$

Tesztek matlabban



Tesztek matlabban