# Numerikus analízis gyakorlat

Második hét

2018.09.12.

1. Igazoljuk az 1-es és 2-es vektornorma ekvivalenciáját definíció alapján!
2. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

   a, Becsüljük meg a mátrix sajátértékeit a Gersgorin–tételek segítségével!

   b, Határozzuk meg $\mathbf{A}$ 1-es, 2-es és maximum normáját pontosan, számológép használata nélkül.

3. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Igazoljuk, hogy $||\mathbf{x}\mathbf{y}^T||_2 = ||\mathbf{x}||_2||\mathbf{y}||_2$
4. Legyen $A$ egy valós elemű, invertálható, szimmetrikus mátrix, amelynek sajátértékei rendre $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$. Számítsuk ki a $||A||_2||A^{-1}||_2$ értékét (ezt a számot nevezik a mátrix kondíciószámának, jele $\kappa_2(A)$). Igazoljuk, hogy ha még azt is tudjuk, hogy $A$ ortogonális, akkor $\kappa_2(A) = 1$.
5. Legyen $||\quad||$ tetszőleges indukált mátrixnorma, $\kappa(A)$ pedig a hozzá tartozó kondíciószám. Igazoljuk, hogy minden invertálható mátrixra $\kappa(A) \geq 1$.
6. Igazoljuk, hogy ha $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges valós, $A$ pedig tetszőleges invertálható mátrix, akkor $\kappa(cA) = \kappa(A)$.
7. Legyenek $A$ és $B$ tetszőleges négyzetes mátrixok, és tfh $\exists A^{-1}$. Tegyük fel továbbá, hogy

$$||A^{-1}|| \cdot ||A - B|| < 1,$$

   valamely indukált normában. Bizonyítsuk be ekkor, hogy $\forall y$ vektorra az

$$F(x) = x - A^{-1}Bx + A^{-1}y$$

   leképezés kontrakció, majd ennek segítségével igazoljuk, hogy $\exists B^{-1}$.