Numerikus analízis gyakorlat

Ötödik hét

2018.10.03.

1. Legyenek A és B tetszőleges négyzetes mátrixok, és tfh $\exists A^{-1}$. Tegyük fel továbbá, hogy
$$||A^{-1}|| \cdot ||A - B|| < 1,$$
valamely indukált normában. Bizonyítsuk be ekkor, hogy $\forall y$ vektorra az
$$F(x) = x - A^{-1}Bx + A^{-1}y$$
leképezés kontrakció, majd ennek segítségével igazoljuk, hogy $\exists B^{-1}$.

2. Igazoljuk, hogy ha a Jacobi-módszer konvergens, akkor a relaxált Jacobi-módszer is konvergens lesz $0 < \omega \leq 1$ paraméter esetén.

3. Az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert az $x_{k+1} = (I - \omega A)x_k + \omega b$ iterációval szeretnénk megoldani. Tegyük fel, hogy A összes sajátértéke valós, és az $[\alpha, \beta]$ intervallumba esik, ahol $0 < \alpha \leq \beta$. Mi lesz az optimális ω?

4. Az $2x - y = 1$, $-x + y = 1$ egyenletet szeretnénk megoldani, a $[0; 0]$ kezdővektorból

   a, relaxált Jacobi-módszerrel, $\omega = 0.5$ paraméterrel. Konvergens lesz az eljárás? Ha igen, tegyünk két lépést az iterációval!

   b, relaxált Gauss-Sediel iterációval, $\omega = 0.5$ paraméterrel. Indokoljuk meg, hogy miért lesz konvergens lesz az eljárás! Becsüljük meg hány lépés múlva lesz a megoldásvektor minden koordinátája 10^{-10}-nél közelebb a pontos megoldáshoz!

5. A kezdővektornak $[0; 0]$-át választjuk, és az $2x - y = 1$, $-x + y = 1$ egyenletet szeretnénk megoldani,

   - gradiens-módszerrel. Adjuk meg a maradékvektor 1-normáját kettő lépés elvégzése után.
   - konjugált gradiens módszerrel. Írjuk le az összes iterációs lépést.