2018 december 13.
Munkaidő: 90 perc

ELSŐ PÓTZÁRTHELYI

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$

1. Igazolja, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy M-mátrix, akkor tetszőleges $\alpha \geq 0$ szám mellett $\mathbf{A} + \alpha\mathbf{I}$ is M-mátrix! Igaz-e a fenti állítás valamilyen $\alpha < 0$ érték mellett is?

2. Igazolja, hogy ha $\mathbf{A}$ nem szinguláris mátrix, akkor az $||x||_{\mathbf{A}} = ||\mathbf{A}x||$ hozzárendelés is vektornormát definiál bármilyen $||.||$ vektornorma esetén.

3. A Matlabban a szokásos dupla pontosságú lebegőpontos számrendszerben (52 bit mantissza, 11 bit karakterisztika, 1 előjelbit) kiszámítva az
$$(x^2 - 1)/(x - 1)$$
hányadost az $x = x_k = 1 + 10^{-k}$ értékekre ($k = 1, 2, \ldots$) az x^2 függvény $x = 1$ pontbeli deriváltjának közelítésére határozza meg a legkisebb olyan k számot, melyre a számítás eredménye NaN lesz (NaN = Not a Number, azaz itt 0/0)! Javasoljon jobb számítási módot a derivált közelítésére!

4. Adja meg az alábbi egyenletrendszer együtthatómátrixának Cholesky-felbontását, majd ennek segítségével oldja meg az egyenletrendszert!
$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix}$$

5. Adja meg az
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$
lineáris egyenletrendszer megoldását a Gauss-módszer segítségével! Ezután adjon becslést arra, hogy mennyit változna az egyenletrendszer megoldása maximumnormában, ha az egyenletrendszer jobb oldalán álló vektor elemeihez és a mátrix elemeihez olyan számokat adna, melyek abszolút értéke 10^{-4}-nél nem nagyobb, és az így kapott egyenletrendszert oldaná meg!

6. Adjon becslést arra, hogy a
$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 &= 12 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$
lineáris egyenletrendszerre alkalmazott Gauss–Seidel-iterációs módszerrel a nullvektorról indulva hány iteráció után tudjuk megközelíteni a pontos megoldást 10^{-6}-nál kisebb maximumnormabeli hibával!