① Ha A M-mátrix akkor $\exists g > 0$: $Ag > 0$ és A minden főátlón kívüli eleme nempozitív. Ekkor

$B := A + \lambda I$ minden főátlón kívüli eleme is nempozitív, tehát B M-mx $\iff \exists$ ilyen g tanúvektor. A tanúvektora jó B-nek is, hisz $Bg = (A + \lambda I) g = \overbrace{Ag}^{>0} + \overset{\geq 0}{\lambda} \overset{>0}{g} > 0$.

Másrészt $\exists \lambda < 0$ amelyre B M-mátrix, mi ha $g > 0$ akkor $\exists \varepsilon > 0$: $g > \varepsilon > 0$ és $\exists \tilde{\varepsilon} > 0$: $Ag > \tilde{\varepsilon} > 0$ hisz ezek végesszámú elemmel rendelkező vektorok, így $\tilde{\varepsilon}$ ill ε választható pl a minimum felének. Legyen most $\lambda = -\tilde{\varepsilon}/\varepsilon \cdot \frac{1}{2}$. Ekkor g továbbra is alkalmas tanúvektor lesz B-nek, hisz

$$Bg = (A + \lambda I) g = Ag - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\varepsilon} g > \tilde{\varepsilon} - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} > 0.$$

② (i) $\|x\|_A = \|Ax\| = 0 \iff Ax = 0$ mi $\|.\|$ vektornorma. Viszont mivel A nem szinguláris $Ax = 0 \iff x = 0$.

$\|Ax\| \geq 0$ mert $\|.\|$ vektornorma

(ii) $\|\lambda x\|_A = \|A(\lambda x)\| = \|\lambda A x\| = |\lambda| \cdot \|Ax\| = |\lambda| \cdot \|x\|_A$

(iii) $\|x + y\|_A = \|A(x+y)\| = \|Ax + Ay\| = \|Ax\| + \|Ay\| = \|x\|_A + \|y\|_A$

③

$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \approx f'(1)$ az $f(x) = x^2$-re. $x_k = 1 + 10^{-k}$

$\frac{0}{0}$ lesz a Matlab szerint ha mind x_k mind x_k^2 közelebb van 1-hez mint a nála legkisebb még ábrázolható 1-nél nagyobb szám.

Ehhez: $1.\underbrace{\overset{52 \text{ bit}}{\rule{3em}{0.4pt}}}_{\text{mantissza}} \underbrace{\overset{11 \text{ bit}}{\rule{3em}{0.4pt}}}_{\text{karakterisztika}}$ Az 1-hez legközelebbi ábrázolható szám

$1.\overbrace{0\ldots0}^{51 \text{ db}}1 = 1 + 2^{(-52)} \approx 1 + 2.2 \cdot 10^{-16}$

$x_k^2 = (1 + 10^{-k})^2 = 1 + 2 \cdot 10^{-k} + 10^{-2k}$ ill $x_k = 1 + 10^{-k}$

Mindkettő 0-t ad, ha $k = 16$.

Másrészt: $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ jobb lesz, ez

NaN helyett 2-t ad, és nincs benne 0 közeli számmal osztás.

(4) Cholesky-felbontás: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}^T$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 14 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}$$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \rightarrow \underline{\underline{L}}(\underline{\underline{L}}^T \underline{x}) = \underline{b} \rightarrow \underline{\underline{L}}\,\underline{y} = \underline{b}$, azaz $\begin{aligned} 3y_1 &= 0 \\ 2y_1 + y_2 &= 0 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 &= 18 \end{aligned}$

$\Rightarrow y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 6$ és $\underline{\underline{L}}^T \underline{x} = \underline{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ innen

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 & x_1 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 & x_2 &= -4 \\ 3x_3 &= 6 & \rightarrow x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ innen } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \end{array}\right]$$

Innen $-5x_2 = -10 \Rightarrow x_2 = 2$ és $x_1 + 2 \cdot 2 = 5 \rightarrow x_1 = 1$, azaz a mo $[1, 2]$. Másrészt

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \frac{\mathcal{K}_\infty(\underline{\underline{A}})}{1 - \mathcal{K}_\infty(\underline{\underline{A}})\|\Delta \underline{\underline{A}}\|_\infty / \|\underline{\underline{A}}\|_\infty} \left(\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|\underline{b}\|} + \frac{\|\Delta \underline{\underline{A}}\|_\infty}{\|\underline{\underline{A}}\|_\infty} \right)$$

Ekkor $\|\underline{x}\|_\infty = 2 \quad \|\underline{b}\|_\infty = 5 \quad \|\Delta \underline{b}\|_\infty \le 10^{-4} \quad \|\Delta A\|_\infty \le 2 \cdot 10^{-4}$

$\|\underline{\underline{A}}\|_\infty = 3$

$$\|\underline{\underline{A}}^{-1}\|_\infty = \left\| \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \frac{3}{5} \Rightarrow \mathcal{K}_\infty(A) = \frac{9}{5}, \text{ azaz}$$

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{2} \le \frac{9/5}{1 - 9/5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} : 3} \left(\frac{10^{-4}}{5} + \frac{2 \cdot 10^{-4}}{3} \right), \text{ innen}$$

$\|\Delta x\|_\infty \le 3.12 \cdot 10^{-4}$

(6) $\begin{aligned} 6x_1 + x_2 &= 12 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned} \rightarrow$ GS módszer $\underline{\underline{B}}_{GS} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -1/6 \\ 0 & 1/12 \end{bmatrix} \quad \underline{f}_{GS} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ azaz

$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \underline{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ és

$$\|\underline{x}_k - \underline{x}^*\|_\infty \le \frac{\|B_{GS}\|_\infty^k}{1 - \|B_{GS}\|_\infty} \|\underline{x}_1 - \underline{x}_0\|_\infty = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^k}{\frac{5}{6}} \cdot 2 < 10^{-6}$$

$8.2.. < k$ azaz

legalább 9 lépés szükséges.