

2018 október 13.
Munkaidő: 90 perc

ELSŐ ZÁRTHELYI

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet

Név: _____

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ

1. Az $a = 0.001$ választás mellett az $A = 1 - \frac{1}{1-2a}$ kifejezés pontos értéke -0.002004008016 . Határozza meg A értékét egy tízes számrendszerű, hatjegyű mantisszás lebegőpontos számokat használó számítógépen (a karakterisztikára most nincs megkötés)! Javasoljon numerikus szempontból jobb képletet A meghatározására és végezze el úgy is a számolásokat ezen a számítógépen!

2. Ismert, hogy a $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2}$ képlet egy mátrixnormát definiál (Frobenius-norma a neve). Igazolja, hogy a Frobenius-norma egy szubmultiplikatív mátrixnorma, amely azonban nem származtatható semmilyen vektornormából!

3. Igazolja, hogy a B mátrix sajátértékei mind valósak, illetve adjon meg egy minél szűkebb halmazt, amiből a C mátrix sajátértékei kikerülhetnek!

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Adja meg az alábbi mátrix LU-felbontását, majd ennek segítségével a determinánsát!

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 14 & 15 \\ -4 & -1 & -16 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Tekintse az

$$x_1 - x_2 = -1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

egyenletrendszert. Adjon felső becslés arra, hogy legfeljebb hány %-ot változhatnak a megoldás értékei koordinátánként, ha az együtthatókhoz és a jobboldalhoz is egy ismeretlen, legfeljebb 0.01 abszolútértékű hibát adunk!

6. Vizsgálja meg, hogy a Jacobi-iteráció és a Gauss–Seidel-iteráció konvergál-e az alábbi egyenletrendszerre!

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 1$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 1$$

Ha talál köztük konvergenst, akkor adjon felső becslést arra, hogy hány iterációs lépést kell elvégeznie a konvergens módszerrel/módszerekkel a $[0, 0]$ kezdővektorral indulva, hogy a megoldást 10^{-6} -nál jobban megközelítse a sorozat maximum normában!