① $A = 1 - \dfrac{1}{1-2a}$ $a = 0.001$

Hatjegyű mantisszával: $1-2a = 0.998$

$1/(1-2a) \overset{*}{=}_{(6)} 1.00200$ 2p

$1 - 1/(1-2a) \overset{*}{=}_{(6)} 0.002$ a kiegyszerűsödés miatt 1p

Jobb képlet: $1 - \dfrac{1}{1-2a} = \dfrac{1-2a-1}{1-2a} = \dfrac{-2a}{1-2a}$ 2p, így

$1-2a = 0.998$

$-2a/(1-2a) = -0.002/0.998 = -2.00401 \cdot 10^{-3}$ ami ezen a gépen a legpontosabban ábrázolható eredmény. 2p

② $\|\underline{\underline{A}}\|_F = \sqrt{tr(\underline{\underline{A}}^* \underline{\underline{A}})} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}{}' a_{ij}^2}$ ha $a_{ij} \in \mathbb{R}$

Nem származtatható vektornormából, ui $\|\underline{\underline{I}}\|_F = \sqrt{n}$, pedig indukált mátrixnormára $\|\underline{\underline{I}}\|_F = 1$. 1p

Szubmultiplikatív, ha $\|\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}\|_F \le \|\underline{\underline{A}}\|_F \cdot \|\underline{\underline{B}}\|_F$ Ehhez:

2p $\left(b_1 | b_2 | \dots | b_n\right) = \underline{\underline{B}}$

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\left(a_i b_j \right)$ $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}$

2p $\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}{}' \langle \underline{a}_i | \underline{b}_j \rangle^2} \overset{CBS}{\le} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}{}' \langle \underline{a}_i | \underline{a}_i \rangle \langle \underline{b}_j | \underline{b}_j \rangle}$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}{}' \langle \underline{a}_i | \underline{a}_i \rangle \sum_{j=1}^{n}{}' \langle \underline{b}_j | \underline{b}_j \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}{}' \langle \underline{a}_i | \underline{a}_i \rangle \|\underline{\underline{B}}\|_F^2} = \sqrt{\|\underline{\underline{A}}\|_F^2 \|\underline{\underline{B}}\|_F^2}$ 2p

③ $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Sé-i: 3, mert alatta csupa 0 van az első oszlopban, ő pedig az első elem. Továbbá a $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ blokk szimmetrikus ⇒ az ehhez tartozó 2 sé valós. 3p

$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

A $\underline{\underline{C}}$ szimmetrikus, tehát minden sé-je valós. 2p

A Gersgorin-tételből: $[1-3, 1+3] = [-2, 4]$, $[7-2, 7+2] = [5, 9]$ és $[5-1, 5+1] = [4, 6]$ intervallumok adódnak a valós tengelyen, így

a sék $\subset [-2, 9]$. 2p

④

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 14 & 15 \\ -4 & -1 & -16 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & 13 \\ 0 & -1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}}$$ 3p

$\det(\underline{\underline{D}}) = \det(\underline{\underline{U}}) = 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-4) = 24$ 2p

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$ 2p

⑤

$$x_1 - x_2 = -1$$
$$x_1 + x_2 = 2$$

Innen $-2x_2 = -3 \rightarrow x_2 = +\frac{3}{2}$, $x_1 = \frac{1}{2}$, azaz a pontos mo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, azaz

$\|A\|_\infty = 2$ és $\|\underline{\underline{A}}^{-1}\|_\infty = 1$, így $\kappa_\infty = 2$, a feladat szövege szerint

$\|\underline{\underline{\delta A}}\|_\infty \leq 0.01 \cdot 2$ $\quad \|\underline{\delta b}\|_\infty \leq 0.01$, továbbá $\|\underline{b}\|_\infty = 2$. 3p

Tudjuk, hogy $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|\underline{x}\|_\infty} \leq \dfrac{\kappa_\infty(\underline{\underline{A}})}{1 - \|\underline{\underline{\delta A}}\|_\infty \cdot \|\underline{\underline{A}}^{-1}\|_\infty}\left(\dfrac{\|\underline{\underline{\delta A}}\|_\infty}{\|\underline{\underline{A}}\|_\infty} + \dfrac{\|\underline{\delta b}\|_\infty}{\|\underline{b}\|_\infty}\right)$ 1p

Behelyettesítve $\dfrac{\|\Delta x\|_\infty}{\frac{3}{2}} \leq \dfrac{2}{1 - 0.02 \cdot 1}\left(\dfrac{0.02}{2} + \dfrac{0.01}{2}\right)$ 1p, azaz

$\|\Delta x\|_\infty \leq 4.592 \cdot 10^{-2}$ 1p

Ez az első koordinátában 9,2 %-os változást, a másodikban 3,06 %-os változást jelent legfeljebb. 1p

⑥

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 1$$
$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 1$$

innen $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}} + \underset{D}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} + \underset{U}{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

Jacobi: $\underline{\underline{B}}_J = -\underline{\underline{D}}^{-1}(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{U}}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ 2p, innen $\lambda^2 - \frac{1}{4} = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2})$ így $\varrho(\underline{\underline{B}}_J) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ a Jacobi konvergens. $f = \underline{\underline{D}}^{-1}\underline{b} = [1, 1]^T = \underline{x}_1^J$

Gauss-Seidel: $\underline{\underline{B}}_{GS} = -(\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{L}})^{-1}\underline{\underline{U}} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$ 2p

innen $-\lambda(\frac{1}{4} - \lambda)$, azaz $\varrho(\underline{\underline{B}}_{GS}) = \frac{1}{4} \Rightarrow$ A Gauss-Seidel is konvergens. 1p

$f = (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{L}})^{-1}\underline{b} = [1, \frac{3}{2}]^T = \underline{x}_1^{GS}$

A hibabecslőformula Jacobira: $\|\underline{x}_k - \underline{x}^*\|_\infty \leq \dfrac{\|\underline{\underline{B}}_J\|_\infty^k}{1 - \|\underline{\underline{B}}_J\|_\infty}\|\underline{x}_1^J - \underline{x}_0^J\|_\infty$, azaz

$\|\underline{x}_k - \underline{x}^*\|_\infty \leq \dfrac{(1/2)^k}{1 - 1/2} \cdot 1 < 10^{-6}$, innen $k > 20.93..$, azaz 21 lépés kell legfeljebb.

Gauss-Seidel-re: $\|\underline{x}_k - \underline{x}^*\|_\infty \leq \dfrac{(1/2)^k}{1 - 1/2} \cdot \dfrac{3}{2} < 10^{-6}$ innen $k > 20.52..$, azaz 22 lépés kell.