

2018 november 26.
Munkaidő: 90 perc

MÁSODIK ZÁRTHELYI

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet

Név: _____

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ

1. Határozza meg az alábbi mátrix QR-felbontását!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Ennek segítségével oldja meg az $\mathbf{A}x = [1, 0, 1]^T$ túlhatározott egyenletrendszert.

2. Végezzen el két lépést inverz hatványiterációval az \mathbf{B} mátrix 3-hoz legközelebbi sajátértékének meghatározására az $[1, 0]$ kezdővektorból indítva, majd a második lépés után Rayleigh-hányados segítségével adjon becslést a keresett sajátértékre.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Legyen $f(x) = x^2 - 3 \sinh(x) + 2$. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ -nek csak egy gyöke van az $[0, 1]$ -n és adjunk becslés a gyökre úgy, hogy elvégezzünk két lépést a Newton-iterációval alkalmas kezdőpontból indítva!
4. Határozza meg a $[-1, 1]$ intervallumon a 3 Csebisev alapponthez tartozó mindhárom alappolinomot. Mi lenne ezek segítségével az x^4 függvényt ezen három alapponton interpoláló polinom? És az x^2 függvényt?
5. Az $f'(x)$ közelítésére az

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+3h) + 2f(x) - 3f(x-h)}{6h}$$

numerikus formulát használjuk. Mennyi lesz a közelítés rendje (mit kell feltennünk f simaságáról ehhez)? Mi lenne ezen közelítés alapján $f(x) = x^2 + 1$ esetén $f'(0)$ a $h = 0.3$ -re? Mennyi lehet a közelítés hibája legfeljebb?

6. Ismert, hogy $\int_0^1 e^{-x} dx$ értéke megközelítőleg 0.632120558828558. Adjon meg olyan numerikus integrálási módszert (végigszámolva a közelítés numerikus értékét is) amely a helyes eredményt legalább 4 tizedesjegyre pontosan adja meg!