(1) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ QR-felbontása egy Givens-forgatással

$x_1 = 5 \quad x_2 = 12 \quad \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \quad c = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \dfrac{5}{13} \quad s = \dfrac{-x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \dfrac{-12}{13}$

Innen $\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & \frac{-12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$ (2)

$\underline{\underline{G}}\cdot\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & -12/13 & 5/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 13 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}$ (1)

$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{-12}{13} \\ 0 & \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$

Túlhatározott egy. rsz-hez $\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{b} \to \underline{\underline{Q}}^T\underline{b}$ lesz a jobboldal, azaz $[1;\ \frac{12}{13};\ \frac{5}{13}]$ (1), innen az

$$x + y = 1 \qquad 13y = \frac{12}{13}$$ (2)

$\rightsquigarrow$ $y = \dfrac{12}{169}$ $x = \dfrac{157}{169}$ a legkisebb négyzetes ért. leg-jobban közelítő mo. (1)

(2) $(\underline{\underline{B}} - 3\underline{\underline{I}})^{-1}$-re kell hatványiteráció, azaz $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \dfrac{1}{5}$ (2)

$x_0 = [1, 0]^T \quad \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} -4/5 & -1/5 \\ -3/5 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -4/5 & -1/5 \\ -3/5 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/5 \\ 18/5 \end{bmatrix}$ (2)

Innen $\lambda \approx \dfrac{\underline{x}_2^T \underline{\underline{B}}\, \underline{x}_2}{\underline{x}_2^T \underline{x}_2} = \dfrac{1405}{19^2 + 18^2 = 685} \cong 2.0511$ (1) (2)

$\begin{bmatrix} 19 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 18 \end{bmatrix}$: $[73 \quad 1]$, 1405

(3) $f(x) = x^2 - 3\,\mathrm{sh}\,x + 2 \qquad f(0) = 2 \quad f(1) = 1 + 2 - 3\,\mathrm{sh}(1) < 0$, így a Bolzano tétel miatt van legalább egy gyök (1). Másrészt $f'(x) = 2x - 3\underbrace{\mathrm{ch}(x)}_{\geq 1} < 0$ a teljes $[0,1]$-en, így $f(x)$ szig. mon. csökken (1) $\Rightarrow$ van gyöke és csak 1 gyöke van.

Newton-iterációhoz $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ ha $f(x_0)\,f''(x_0) > 0$ akkor szig. mon. konv. ha f''-nek nincsen gyöke $[x_0, x^*]$-on. Mivel $x = \overbrace{\mathrm{asinh}\left(\tfrac{2}{3}\right)}^{0.6251\ldots}$-ban a második deriváltnak van gyöke, de ugyanaz az előjele a két végpontban mint a függvényünk, így valamelyik végpont mindenképpen jó lesz. (2)

$f(1)\cdot f''(1) > 0$ (1) így $x_0 = 1$ szemmel láthatólag jó lesz, ekkor (valójában mindkettőből indítva konv.)

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1 - 3\,\mathrm{sh}\,1 + 2}{2 - 3\,\mathrm{ch}\,1} = 0.80009$$ (1)

$$x_2 = 0.80009 - \frac{0.80009^2 - 3\,\mathrm{sh}\,0.80009 + 2}{2\cdot 0.80009 - 3\,\mathrm{ch}\,0.80009} = 0.789919\ldots$$ (1)

(4) $[-1,1]$ intervallumon a Csebisev alappontok $T_n(x)$ gyökei, ahol $T_0(x)=1$ $T_1(x)=x$ $2T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$, innen

$2T_2(x)=2x^2-1 \to T_2(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)$ és $2T_3(x)=xT_2(x)-T_1(x)=$

$\left(x^3-x)-x\right)\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)=\frac{1}{4}x\left(x^2-\frac{3}{2}\right)$ azaz $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0 a három alappont. Innen (2)

$$l_0(x)=\frac{x\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-2\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3}x\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad l_1(x)=\frac{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-\frac{\sqrt{3}^2}{2^2}}=-\frac{4}{3}\left(x^2-\frac{3}{4}\right)$$

$$l_2(x)=\frac{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}{\frac{2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3}x\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ (2)

Innen x^2-et interpoláló polinom: $\frac{3}{4}l_0(x)+\frac{3}{4}l_2(x)=x^2$ (2)

x^4-et : $\frac{9}{16}l_0(x)+\frac{9}{16}l_2(x)=\frac{3}{4}x^2$ (1)

(5) $f'(x)\approx\frac{f(x+3h)+2f(x)-3f(x-h)}{6h}$

$1/\ f(x+3h)=f(x)+3hf'(x)+\frac{9h^2}{2}f''(\xi)$

$-3/\ f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\zeta)$

Innen $f'(x)\approx\frac{6hf'(x)+3h^2f''(Z)}{6h}=f'(x)+\frac{h}{2}f''(Z)$ (3)

azaz elsőrendű, ha $f\in C^2$

$f(x)=x^2+1$-re $h=0.3$

$$f'(0)\approx\frac{(0.9)^2+1+2\cdot1-3\left((-0.3)^2+1\right)}{1.8}=\frac{0.54}{1.8}\approx0.3$$ (2)

A pontos $2x$ lenne azaz 0. $M_2=\|f''\|_{\sup}^{[0,1]}=2$

A közelítés hibája $\leq\frac{h}{2}M_2$ azaz $\frac{0.3}{2}\cdot2=0.3$ (2)

(6) Például Romberg módszer egy 4 és egy 2 intervallumos trapézzal, vagy Simpson ekvidisztans osztva $[0,1]$-et.