Numerikus számítások

Második hét

2019.02.13.

1. Legyen **A** az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & \text{-1} & \text{-1} & 0 \\ \text{-1} & 4 & \text{-1} & 0 \\ \text{-1} & \text{-1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

   a, Becsüljük meg a mátrix sajátértékeit a Gersgorin–tételek segítségével!

   b, Határozzuk meg **A** 1-es, 2-es és maximum normáját pontosan, számológép használata nélkül.

2. Bizonyítsuk be, hogy a sup-norma valóban a p-normák $p \to \infty$ limesze, majd számítsuk ki, hogy milyen mátrixnormát indukál.

3. Legyen A egy valós elemű, invertálható, szimmetrikus mátrix, amelynek sajátértékei rendre $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$. Számítsuk ki a $||A||_2||A^{-1}||_2$ értékét (ezt a számot nevezik a mátrix kondíciószámának, jele $\kappa_2(A)$). Igazoljuk, hogy ha még azt is tudjuk, hogy A ortogonális, akkor $\kappa_2(A) = 1$.

4. Legyen $|| \quad ||$ tetszőleges indukált mátrixnorma, $\kappa(A)$ pedig a hozzá tartozó kondíciószám. Igazoljuk, hogy minden invertálható mátrixra $\kappa(A) \geq 1$.

5. * Igazoljuk, hogy ha $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges valós, A pedig tetszőleges invertálható mátrix, akkor $\kappa(cA) = \kappa(A)$.