1. Analízis

1.1. Tétel. *(Bolzano) Ha* $f(x) \in C([a,b])$ *és* $\xi \in (f(a), f(b))$*, akkor* $\exists c \in (a,b)$*, melyre* $f(c) = \xi$.

1.2. Tétel. *(Lagrange) Ha* $f(x) \in C^1([a,b])$*, akkor* $\exists \xi \in (a,b)$*, melyre*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

1.3. Tétel. *(Lagrange-féle maradéktag) Legyen* $f(x) \in C^{n+1}(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *valamely* $\delta > 0$*-ra. Ekkor* $f(x)$ x_0 *körüli* n*-edfokú Taylor-polinomja:*

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i,$$

és

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

ahol $\xi \in (x_0, x)$.

1.4. Tétel. *(Banach-féle fixponttétel) Legyen* $I \subset \mathbb{R}$ *zárt intervallum,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény, melyre* $f(I) \subset I$*. Legyen továbbá* $f(x)$ *kontrakció, azaz* $|f(x) - f(y)| < q|x-y|$*,* $\forall x, y \in I$*-re valamely* $0 \leq q < 1$*-re. Ekkor* $\exists!\ x^* \in I$*, melyre* $f(x^*) = x^*$*. Továbbá az* $x_{n+1} = f(x_n)$ *iteráció tetszőleges* $x_0 \in I$*-ből indítva tart* x^**-hoz.*

2. Lineáris algebra

2.1. Tétel. *Legyen* $A \in \mathbb{C}^n$ *mátrix. Ha egy* v *vektorra és* λ *számra teljesül, hogy* $Av = \lambda v$*, akkor a* λ*-t az* A *mátrix sajátértékének nevezzük,* v *pedig a* λ *sajátértékhez tartozó sajátvektor. Egy* $n \times n$*-es mátrixnak (multiplicitással számolva) pontosan* n *darab sajátértéke van, amelyeket a* $\det(A - \lambda I)$ *karakterisztikus polinom gyökei adnak.*

2.2. Tétel. *(Spektrálfelbontás) Tegyük fel, hogy az* A *felcserélhető az adjungáltjával (azaz normális mátrix). Legyen* Λ *a sajátértékeket tartalmazó diagonális mátrix,* V *pedig a sajátvektorokat (a* Λ*-ban szereplő sorrendben) soronként tartalmazó mátrix. Ekkor az* A *mátrix felírható* $A = V^{-1}\Lambda V$ *alakban, azaz diagonalizálható.*

2.3. Tétel. *A sajátértékekre teljesül, hogy*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad\qquad \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Tr(A) *definició szerint a mátrix főátlójában szereplő elemek összege. Ha minden sajátérték pozitív valós szám, akkor az* A *mátrixot pozitív definitnek nevezzük. Ha a sajátértékek nemnegatív valósak, akkor pozitív szemidefinitnek, ha negatív valósak akkor negatív definitnek, végül ha nempozitív valósak akkor negatív szemidefinitnek.*

2.4. Tétel. *(Gersgorin) Legyen* $c_i = a_{i,i}$ *és*

$$r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \qquad i = 1 \ldots n$$

A c_i *középpontú* r_i *sugarú zárt körlapok adják a komplex számsíkon az* n *darab Gersgorin kört.*

Minden sajátérték beleesik valamelyik körbe, továbbá ha k *kör uniója diszjunkt a maradék* $n-k$ *kör uniójától, akkor a* k *kör uniójába pontosan* k *darab sajátérték esik.*