Többes integrálok

Sáfár Orsolya

2015 május 13.

Kétváltozós függvény kettősintegráljának definíciója

Legyen $f(x,y)$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ korlátos függvény egy T korlátos és mérhető területű tartományon. Vegyük a T tartomány egy felosztását $T_1, T_2, \ldots, T_n$ tartományokra, melyek területe legyen rendre $t_1, t_2, \ldots t_n$. Képezzük a

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \inf_{(x,y)\in T_i} f(x,y) \qquad \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \sup_{(x,y)\in T_i} f(x,y)$$

alsó illetve felső közelítő összegeket. Ha ezek tartanak egy közös határértékhez, midőn $\max_i t_i \to 0$, akkor ezen közös határérték lesz a függvény kettős integrálja, jele $\iint_T f(x,y)\mathrm{d}A$.

Téglalap

Legyen $T \subset \mathbb{R}^2$ egy téglalap, azaz két intervallum direkt szorzata, $T = [a, b] \times [c, d]$. Ekkor

$$\iint_T f(x, y)\mathrm{d}A = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Ennek segítségével vissza tudjuk vezetni a kettős integrál kiszámítását egymás utáni egyszeres integrálok kiszámítására (ez a Fubini-tétel leegyszerűsített változata).

Első példa

Legyen $T = [-1, 1] \times [0, 2]$

$$\iint_T xy \cosh(xy^2) \mathrm{d}A = ?$$

Ezen integrált kétféleképpen is át tudjuk írni:

$$\iint_T xy \cosh(xy^2) \mathrm{d}A = \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=0}^{2} xy \cosh(xy^2) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$\int_{y=0}^{2} \left(\int_{x=-1}^{1} xy \cosh(xy^2) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Itt mi dönthetünk az integrálás sorrendjéről. Célszerűbb először y, majd x szerint integrálni, hiszen ekkor a függvény összetett függvény szorozva a belső függvény deriváltja alakú (míg x függvényeként tekintve a belső fv deriváltja y^2 lenne).

Első példa

$$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{2} xy\cosh(xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=-1}^{1}\left[\frac{\sinh(xy^2)}{2}\right]_{y=0}^{2}\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x=-1}^{1}\frac{\sinh(4x)}{2} \quad - \quad 0 \quad \mathrm{d}x = \left[\frac{\cosh(4x)}{8}\right]_{x=-1}^{1} = 0$$

Normáltartományok

Egy N_x tartományt x-ra vonatkozó normáltartománynak nevezzünk, ha léteznek olyan $c(x)$ és $d(x)$ alsó- illetve felső határoló függvények, hogy az N_x tartomány összes pontja jellemezhető az $a \leq x \leq b$ és $c(x) \leq y \leq d(x)$ egyenlőtlenségekkel. Ekkor:

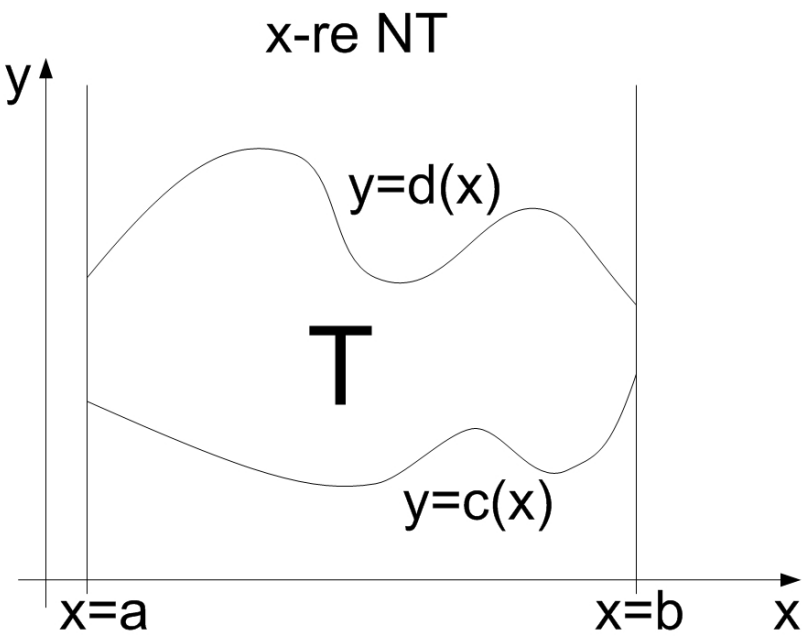
$$\iint_T f(x,y)\mathrm{d}A = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

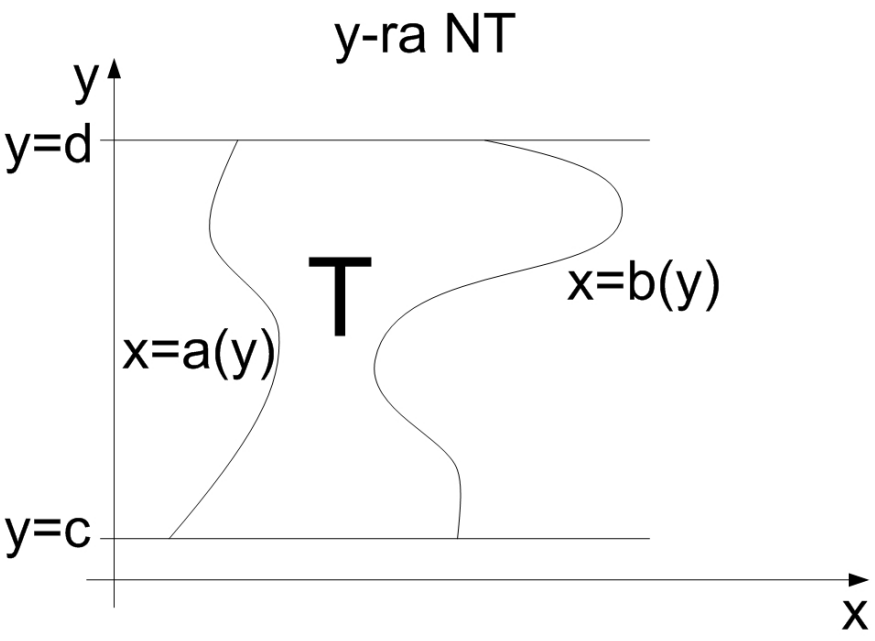
Normáltartományok

Egy N_y tartományt y-ra vonatkozó normáltartománynak nevezzünk, ha léteznek olyan $a(y)$ és $b(y)$ baloldali- illetve jobboldali határoló függvények, hogy az N_y tartomány összes pontja jellemezhető az $c \leq y \leq d$ és $a(y) \leq x \leq b(y)$ egyenlőtlenségekkel. Ekkor:

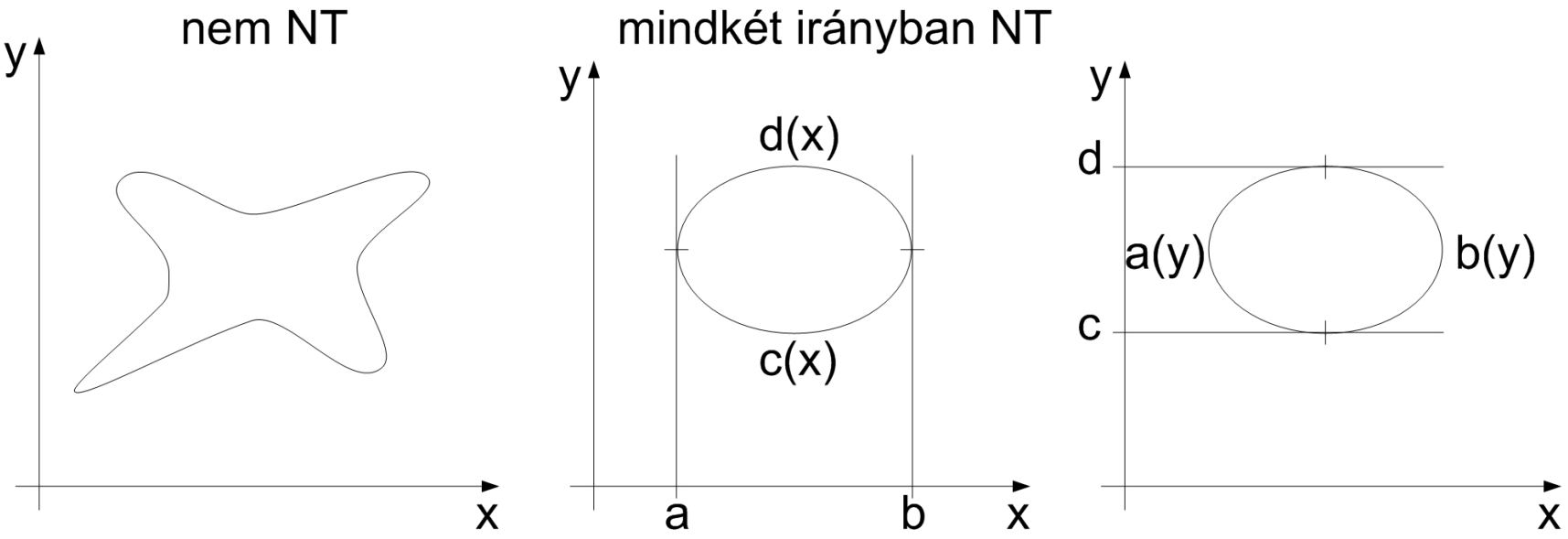
$$\iint_T f(x,y)\mathrm{d}A = \int_{y=c}^{d} \int_{x=a(y)}^{b(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Példák normáltartományokra





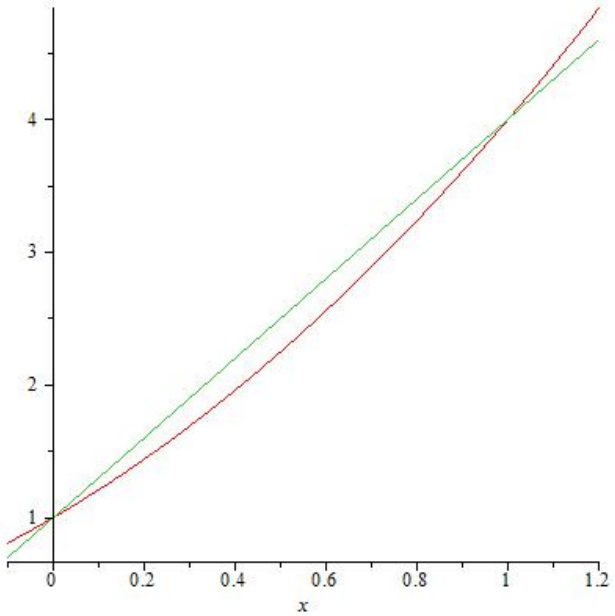
Példák normáltartományokra



Második példa

Legyen a T az $y = (x+1)^2$ parabola illetve az $y = 3x + 1$ egyenes által határolt korlátos tartomány.

$$\iint_T 5x + 2y \mathrm{d}A = ?$$



Második példa

Ekkor T x-re (egyébként y-ra is) normáltartomány. A parabola az alsó határoló görbe, az egyenes pedig a felső. Az x határai a két görbe metszéspontjaiból, azaz $(x+1)^2 = 3x+1$ egyenelet megoldásaiból 0-nak, illetve 1-nek adódnak. Azaz előbbi tételünk szerint:

$$\iint_T 5x + 2y \mathrm{d}A = \int_{x=0}^{1} \int_{y=(x+1)^2}^{3x+1} 5x + 2y \mathrm{d}y \mathrm{d}x =$$

$$\int_{x=0}^{1} \left[5xy + y^2\right]_{y=(x+1)^2}^{3x+1} \mathrm{d}x =$$

Második példa

$$\int_{x=0}^{1} 5x(3x+1)+(3x+1)^2-5x(x+1)^2-(x+1)^4\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x=0}^{1} -5x^3-5x^2-x^4-3x^3+6x^2+3x\mathrm{d}x =$$

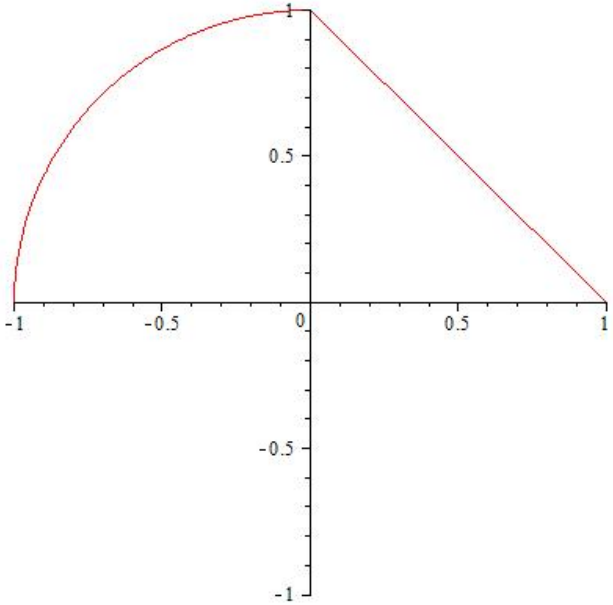
$$\left[-\frac{x^5}{5}-8\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{1}$$

$$=-\frac{1}{5}-8\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+3\frac{1}{2}=\frac{-11}{30}$$

Harmadik példa

Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, majd számítsuk ki a határológörbék által meghatározott tartomány területét!

$$\int_{x=-1}^{0}\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} 1\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} 1\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$



Harmadik példa

A tartomány transzformációja : $0 \leq y \leq 1$, illetve baloldali határ: $y = \sqrt{1-x^2} \to x = -\sqrt{1-y^2}$ és a jobboldali határ: $y = 1 - x \to x = 1 - y$. Így:

$$\int_{x=-1}^{0} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} 1 \mathrm{d}y \mathrm{d}x =$$

$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} [x]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} \mathrm{d}y =$$

$$\int_{y=0}^{1} 1 - y + \sqrt{1-y^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Negyedik példa

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=y^2}^{1} y\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$$

x szerint nem tudjuk felírni a primitív függvényt, ezért cseréljük meg az integrálás sorrendjét!

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=y^2}^{1} y\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{x}} y\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x=0}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right]_{y=0}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x=0}^{1}\frac{x}{2}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{4}\right]_{x=0}^{1} = \frac{\mathrm{e}}{4} - \frac{1}{4}$$

Polártranszformáció

Bizonyos típusú tartományok polár koordinátákkal szebben írhatóak fel, esetleg a függvény alakja egyszerűsödik. A polár koordinátákban r jelöli a pont origótól mért távolságát, φ a pont helyvektora és az x tengely pozitív fele által bezárt szöget. Ekkor az összefüggés a Descartes koordinátákkal:

$$x = r\cos(\varphi)$$

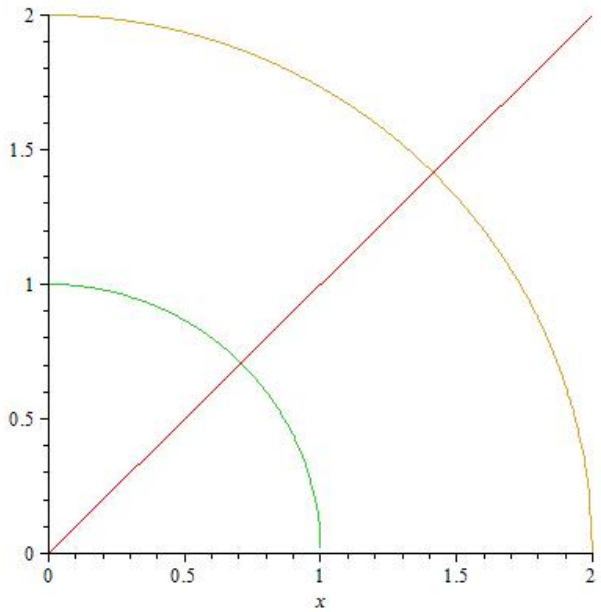
$$y = r\sin(\varphi),$$

ahol $0 \leq r$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Ha integrálba helyettesítünk polár koordinátákat, akkor még be kell szoroznunk az áttérés Jacobi-determinánsának abszolút értékével, polárkoordináták esetén r-rel.

Ötödik példa

Legyen T az $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq y \leq x$ egyenlőtlenségek által meghatározott tartomány.

$$\iint_T xy^5 \mathrm{d}A = ?$$



Ötödik példa

Térjünk át polár koordinátákra! Ekkor a tartományt a $1 \leq r \leq 2$ és a $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ egyenlőtlenségek írják le. A keresett integrál pedig:

$$\iint_T xy^5 \mathrm{d}A = \int_{r=1}^{2} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} r\cos(\varphi) r^5 \sin^5(\varphi) r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r =$$

$$\left[\frac{r^8}{8}\right]_{r=1}^{2} \left[\frac{sin^6(\varphi)}{6}\right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\left(32 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{48}$$

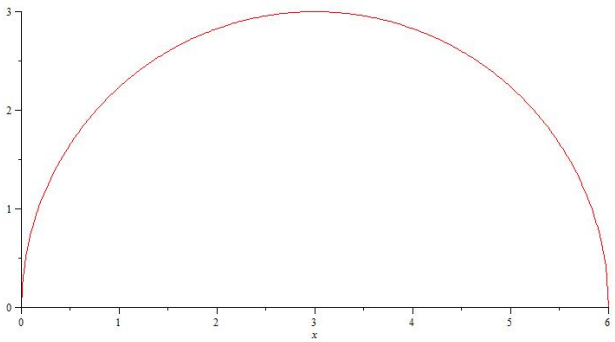
Hatodik példa

Legyen T az $x^2 - 6x + y^2 \leq 0$ és $0 \leq y$ egyenlőtlenségek által meghatározott tartomány.

$$\iint_T \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}A = ?$$

Ekkor a tartomány egy (nem origó középpontú) félkör, hiszen

$x^2 - 6x + y^2 \leq 0 \to (x-3)^2 + y^2 \leq 3^2$, azaz érinti az y tengelyt.



Hatodik példa

Ekkor $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, és Thálész-tétele miatt $0 \leq r \leq 6\cos(\varphi)$.

$$\iint_T \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}A =$$

$$\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{6\cos(\varphi)} \sqrt{r^2\cos(\varphi)+r^2\sin(\varphi)} \cdot r \quad \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{6\cos(\varphi)} r^2 \quad \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{6\cos(\varphi)} \mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6^3\cos^3(\varphi)}{3}\mathrm{d}\varphi = 72\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi)(1-\sin^2(\varphi))\mathrm{d}\varphi =$$

$$72\left[\sin(\varphi) - \frac{\sin^3(\varphi)}{3}\right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi = 72\left(1-\frac{1}{3}\right) = 48$$

Hármas integrál definíciója

Legyen $f(x, y, z)$ egy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor a hármas Rieman integrálja egy V mérhető térfogatú térrészen definiálható V felosztásának segítségével (hasonlóan kétváltozós esethez).
Téglatest alakú tartományon, azaz $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$-on igaz a három darab egyszeres integrálra történő felbontás:

$$\iiint_V g(x, y, z)\mathrm{d}V = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} \int_{z=e}^{f} g(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$\int_{z=e}^{f} \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} g(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \dots$$

Normáltartomány térben

A térben is beszélhetünk normáltartományról, akkor ha egy $V \subset \mathbb{R}^3$ térrész jellemezhető az

$$a \leq x \leq b$$

$$c(x) \leq y \leq d(x)$$

$$e(x,y) \leq z \leq f(x,y)$$

egyenlőtlenségekkel. Ekkor

$$\iiint_V g(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c(x)}^{d(x)} \int_{z=e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Normáltartomány térben

A változók sorrendje lehet más, a hangsúly a függéseken van.
Például: ha V a

$$c \leq y \leq d$$

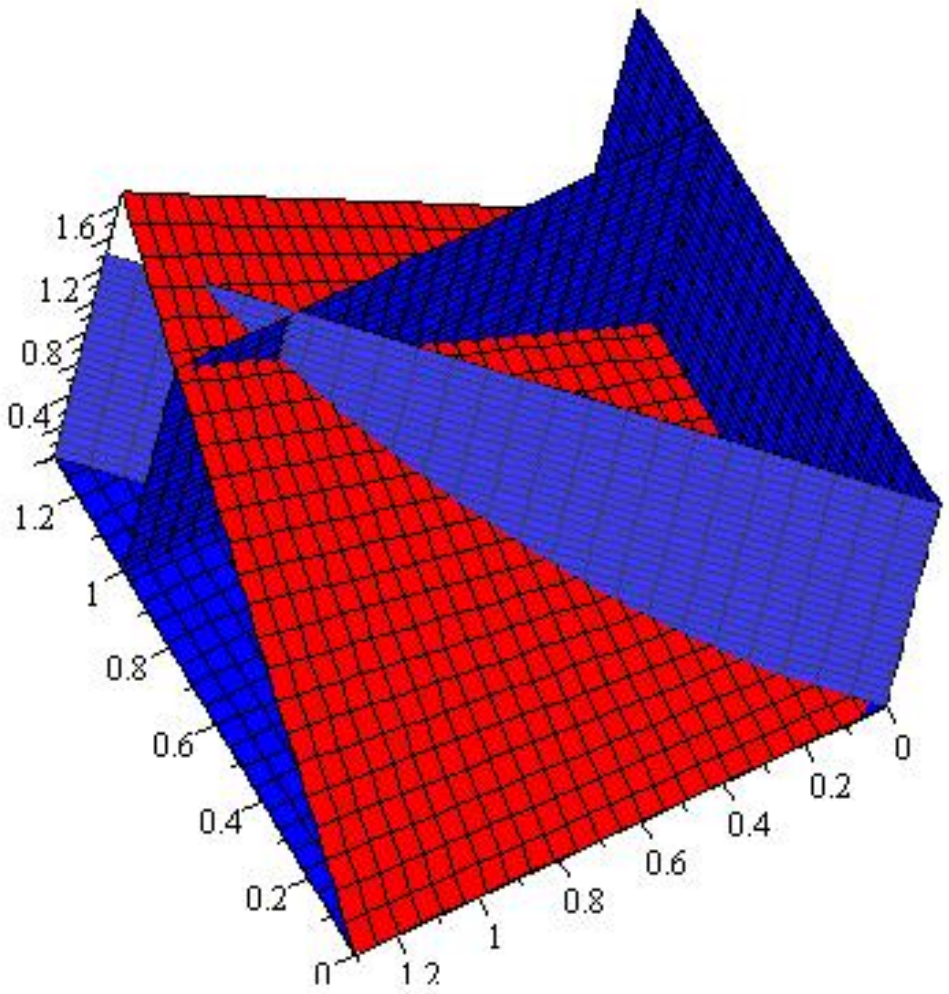
$$a(y) \leq x \leq b(y)$$

$$e(x,y) \leq z \leq f(x,y)$$

egyenlőtlenségekkel jellemezhető, akkor

$$\iiint_V g(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_{y=c}^{d} \int_{x=a(y)}^{b(y)} \int_{z=e(x,y)}^{f(x,y)} g(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Példa normáltartományra



Hetedik példa

Legyen V a

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$-x - 2y + 2 = 0$$

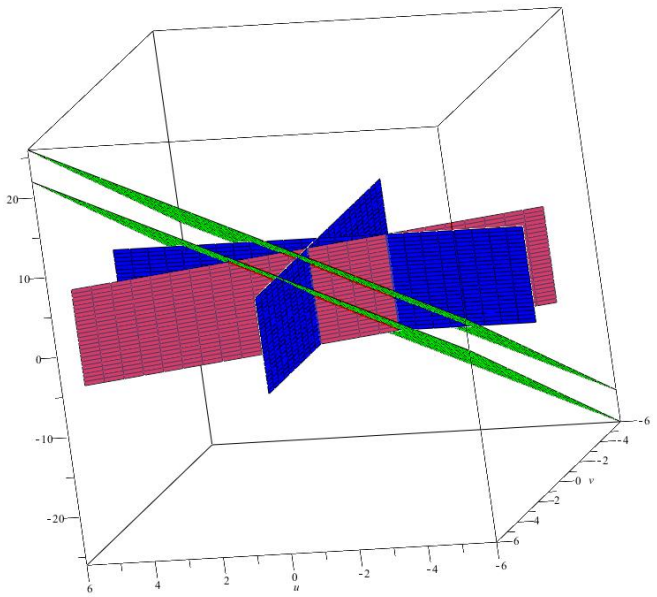
$$-2x - 2y + z + 2 = 0$$

$$-2x - 2y + z - 2 = 0$$

síkok által határolt korlátos térrész.

$$\iiint_V 6xyz \mathrm{d}V?$$

Hetedik példa



Ekkor V felírása normáltartományként: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq -\frac{x}{2} + 1$, és $2x + 2y - 2 \leq z \leq 2x + 2y + 2$

Hetedik példa

$$\iiint_V 6xyz \quad \mathrm{d}V = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{-\frac{x}{2}+1} \int_{z=2x+2y-2}^{z=2x+2y+2} 6xyz \quad \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{-\frac{x}{2}+1} \left[3xyz^2\right]_{z=2x+2y-2}^{z=2x+2y+2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{-\frac{x}{2}+1} 3xy(2x+2y+2)^2 - 3xy(2x+2y-2)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{-\frac{x}{2}+1} 3xy \cdot 16(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

Hetedik példa

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{-\frac{x}{2}+1} 48(x^2y+xy^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{2}\left[24x^2y^2+16xy^3\right]_{y=0}^{-\frac{x}{2}+1}\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x=0}^{2} 24x^2\left(-\frac{x}{2}+1\right)^2+16x\left(-\frac{x}{2}+1\right)^3\mathrm{d}x =$$

$$\int_{x=0}^{2} 6x^2(-x+2)^2+2x(-x+2)^3\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{2} 4x^4+16x\mathrm{d}x =$$

$$\left[4\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{8}\right]_{x=0}^{2} = \frac{128}{5}+\frac{1}{2} = \frac{261}{10}$$

A hengerkoordináták definiciója

Egy pont helyzetét a térben jellemezhetjük az (x, y, z) valós számokból álló hármas helyett, az (r, φ, z) hármassal, ahol z jelentése változatlan (a z koordináta), r a pont és a z tengely távolsága, φ pedig a pont xy síkra eső merőleges vetületének helyvektorának és az x tengely pozitív fele által bezárt szöge. Az áttérés Descartes és hengerkoordináták között:

$$x = r\cos(\varphi)$$

$$y = r\sin(\varphi)$$

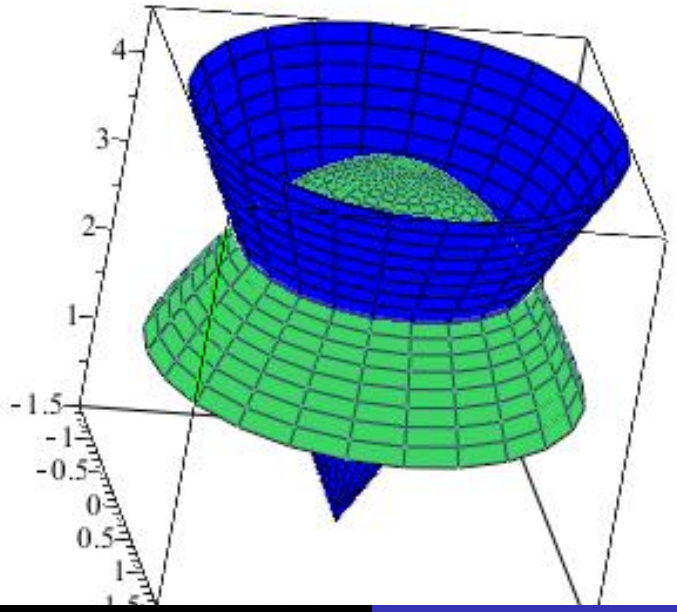
$$z = z$$

ahol $z \in \mathbb{R}$, $0 \leq r$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. A hengerkoordinátákra való áttérés Jacobi-mátrix determinánsának abszolútértéke r.

Nyolcadik példa

Legyen V azon korlátos térrész, amelyet a $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ egyenletű kúp, illetve a $z = 4 - x^2 - y^2$ egyenletű forgásparaboloid határol.

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}V = ?$$



Nyolcadik példa

Térjünk át hengerkkordinátákra! Ekkor $z = 3r$ illetve $z = 4 - r^2$ a két határoló felület egyenlete. A metszésvonalra $3r = 4 - r^2$ miatt $r = 1$ adódik. A (normál)tartomány határai a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$ illetve $3r \leq z \leq 4 - r^2$.

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}V =$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=3r}^{4-r^2} \sqrt{r^2 cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)} \cdot r \quad \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

Nyolcadik példa

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=3r}^{4-r^2} r^2 \quad \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left[r^2 z\right]_{z=3r}^{4-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} 4r^2 - r^4 - 3r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[4\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} - 3\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{1}\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right) = \frac{23\pi}{30}$$

Gömbi koordináták

Egy pont helyzetét a térben jellemezhetjük az (x, y, z) valós számokból álló hármas helyett, az (r, φ, θ) hármassal, ahol r a pont és az origó távolsága, θ a pont helyvektora és a z tengely pozitív fele által bezárt (tér)szög, φ pedig a pont xy síkra eső merőleges vetületének helyvektorának és az x tengely pozitív fele által bezárt szöge. Az áttérés Descartes és gömbikoordináták között:

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\theta)$$

$$y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$$

$$z = r\cos(\theta)$$

ahol $0 \leq r$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$.

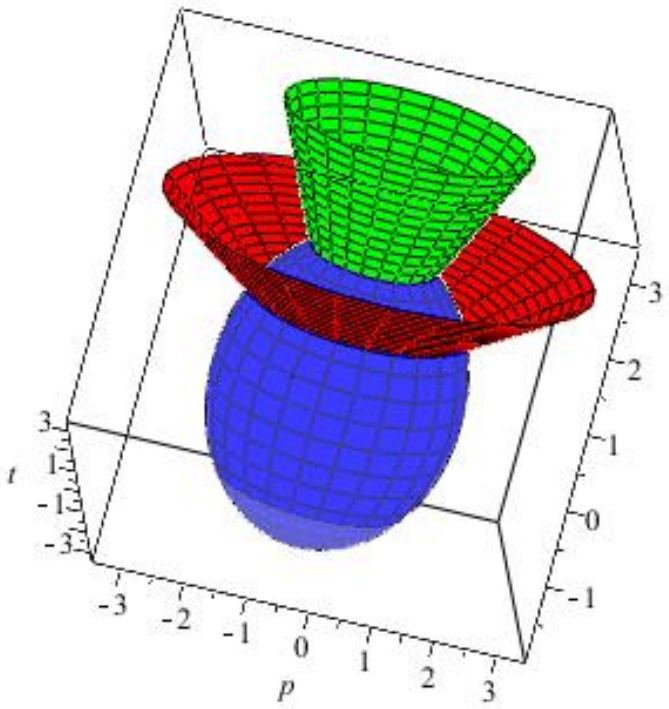
Gömbi koordináták

Ezen szögeket úgy képzelhetjük el, hogy ha $r = r_0$-et rögzítjük, akkor $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$ miatt egy gömbfelületen vagyunk, például a földgömbön. Ekkor θ azt mondja meg, hogy melyik szélességi körön vagyunk pl. $\theta = 0$ az Északi-sark, $\theta = \frac{\pi}{8}$ a Ráktérítő, $\theta = \frac{\pi}{2}$ az Egyenlítő.
A φ szög pedig a hosszúsági fokoknak felel meg, ez mondja meg például, hogy melyik időzónában vagyunk. Így már érthetőbb, hogy θ miért csak π-ig megy 2π helyett.

A gömbikoordinátákra való áttérés Jacobi-mátrix determinánsának abszolútértéke $r^2 \sin(\theta)$.

Kilencedik példa

Számoljuk ki a V: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ és $\sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett korlátos térrész térfogatát!



Kilencedik példa

Gömbi koordinátákban az első egyenlőtlenség $0 \leq r \leq 2$ alakban írható.
A második egyenlőtlenség : $\sqrt{\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2} \rightarrow$ $\frac{r}{\sqrt{3}} r \sin(\theta) \leq r \cos(\theta) \leq \sqrt{3} \sin(\theta)$ miatt r-el, és $cos(\theta)$-val átosztva (ami pozitív, hiszen z is mindig pozitív az origót kivéve, ugyanis az alsó határ egy gyök) kapjuk, hogy $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \tan(\theta) \leq \sqrt{3}$, azaz $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$.

Kilencedik példa

$$\iiint_V 1\mathrm{d}V = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{r=0}^{2} r^2\sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi =$$

$$2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{2}\left[-cos(\theta)\right]_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\pi\frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$