

Házi feladatok

Valószínűesszámitás és statisztika programtervező informatikusoknak, 2015 ősz

A házi feladatok tartalmaznak könnyebb és nehezebb példákat is ugyanannyi pontért. A feladatokhoz készítettem "tipp"eket. Elsősorban ennek az a célja, hogy ha valaki némi gondolkodás után nem látja, hogy egy feladatnál éppen mit kell csinálni, akkor ne akadjon el: vagy egy olyan órai feladathoz irányítom, ami hasonló az aktuális problémához, vagy konkrétan megmondom, hogy milyen tételt alkalmazzon, esetleg azt is milyen szereposztásban. Egy feladatnak többféle lehetséges megoldása is van, nem csak azon az úton lehet elindulni, amit javasoltam. Lényegileg különböző megoldásokért plusz pont jár. Szeretném felhívni mindenki figyelmét arra, hogy a ZH-ban ilyesfajta segítség nem lesz. Ajánlom, hogy mindenki mielőtt ránéz a "tipp"ekre próbálkozzon a feladatok megoldásával.

Részpontszámok járnak, de válaszokat csak indoklással fogadok el. Az **igazi** csoportmunka hasznos, ebben az esetben is mindenki saját maga írja le a megoldást a saját szavaival (képleteivel). A passzív másolás viszont haszontalan, nem hozza meg a kívánt fejlődést, ezenfelül még büntetem is.

Jó munkát kívánok! :)

Kombinatorika és egyenlő valószínűségű események ($\sum 17$ pont)

1. Van 5 matek, 7 történelem, 4 irodalom és 2 idegen nyelv könyvem, a könyvek különbözők!

- Hányféleképpen tudom a könyveket elhelyezni a szobám egyik polcán (természetesen mind elfér az egyik polcon)?
- Hányféleképpen tehetem meg ugyanezt, ha szeretném, hogy az azonos tárgyakhoz kapcsolódó könyvek egymás mellett legyenek?
- Kaptam még 3 azonos (de az eddiektől különböző) matek könyvet!
 - Hányféleképpen lehetne csak a matek könyveket most sorba rendezni?
 - Hányféleképpen lehetne az összes (21db) könyvet sorba rendezni, ha az azonos tárgyakhoz kapcsolódó könyveket egymás mellé szeretném tenni?
- Felesleges nekem a 3 ugyanolyan könyv, így 2-t eladok belőle. Most van 6 matek, 7 történelem, 4 irodalom és 2 idegen nyelv könyvem, mind különböző (összesen 19db könyv). Mennyi a valószínűsége, hogy találomra kiválasztva 3 könyvet kiválasztom a 2 idegen nyelv könyvet és az egyik történelem? Számítsd ki a valószínűséget a húzások sorrendjére való tekintettel és tekintet nélkül is!

($4=1+1+1+1$ pont)

2. Egy közösségben 20 család van: 6 családban egy gyerek van, 8 családban kettő, 3 családban három, 2 családban négy, 1 családban öt.

- Ha egy családot véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy abban a családban i gyerek van, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
- Ha egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy ő egy i gyerekes családból jött, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

($2=1+1$ pont)

3. Egy urnában van n golyó, melyek közül egy piros, a többi fekete, véletlenszerűen kihúzzunk k darabot (visszatevés nélkül). Mi a valószínűsége, hogy a piros golyót is kihúztuk?

- a) Írjuk fel az eseményteret, amikor a húzások sorrendjére nem vagyunk tekintettel, és ezzel a módszerrel határozzuk is meg a kérdéses valószínűséget! (Pont jár a kombinatorikus forma lehető legegyszerűbb alakra hozásáért.)
- b) Ellenőrizzük le számításainkat úgy, hogy kiszámoljuk a fenti valószínűséget figyelembe véve a húzások sorrendjét!

(3=2+1 pont)

4. Apukámmal fagyizni megyünk. Én három, Ő négy gombócos fagyikelyhet eszik. Hányféle fagyikehely állítható össze nekem, hányféle neki, ha a Zsitvay cukrászdában kondérban tartják a fagyit, ezért mindig csak 7 féle van: puncs, csoki, vanília, gesztenye, őszibarack, eper, fahéj?

(2=1+1 pont)

5. Egy urnában van 5 piros, 7 zöld, 8 sárga golyó.

- a) Ötöt visszatevés nélkül húzva mi a valószínűsége, hogy csak sárgát húzzunk? Mi az eseménytér?
- b) Mi a helyzet a visszatevése esetében?

(2=1+1 pont)

6. Aritmetriában az autók rendszámai hatjegyű számok 000000 és 999999 között.

- a) Mi a valószínűsége, hogy egy tetszőleges rendszám minden jegye prím?
- b) Hányféle rendszám lehetséges, ha egy rendszámban nem jelenhet meg az "ördög száma", vagyis **pontosan** három darab 6-os közvetlenül egymás mellett?

(3=1+2 pont)

7. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 5 jegyű szám páros? Mi az eseménytér?

(1 pont)

Szita-formula, feltételes valószínűség, függetlenség, TVT, Bayes-tétel($\sum$ 29 pont)

8. Egy lóversenyen 7 ló indul. Jelölje C azt az eseményt, hogy Csillag az első 3 befutó közt van, R pedig azt, hogy Ráró páros helyen végez.

- a) Mennyi $C \cup R$ valószínűsége?
- b) Hány elemi eseményt tartalmaz $C \cup R$?

(3=2+1 pont)

9. Tfh. n vendég, n esernyőjét felakasztják a színházba befele menet. Kifelé az esernyőket véletlenszerűen osztják ki. Mi annak a valószínűsége, hogy legalább 1 ember a saját esernyőjével megy haza? (A binomiális kifejezésektől tisztított eredményt kérek!) Mennyi a kapott eredmény határértéke?

(4 pont)

10. Tfh. ma 10%, holnap 40% valószínűséggel esik az eső. Annak a valószínűsége, hogy mindkét nap esik 35%. Milyen valószínűséggel fog legalább az egyik nap esni az eső?

(1 pont)

11. Van egy torz érménk, ami $\frac{2}{5}$ valószínűséggel mutat fejet. Az érmével annyi-szor dobunk, amennyi egy szabályos kockadobás eredménye. Mi a valószínűsége, hogy nem kapunk fejet? (2 pont)
12. Három szakács A, B, C egy speciális sütit sütnék, melyek azonban sajnos rendre 0,02, 0,03, 0,05 valószínűséggel nem kelnek meg rendesen a három szakács keze alatt. Az étteremben, ahol dolgoznak a sütemények 50%-át A süti, B a 30%-át, C pedig a 20%-át. Mi a valószínűsége, hogy a most készülő süti nem fog rendesen megkelni? (2 pont)
13. Egy első- és másodévesek által látogatott tárgyat 8 elsőéves fiú, 6 elsőéves lány, 4 másodéves fiú vette fel. Hány másodéves lány vette fel a tárgyat, ha tudjuk, hogy egy, a tárgy hallgatói közül kiválasztott hallgató neme és évfolyama független egymástól? (2 pont)
14. Egy szabályos érmét kétszer feldobnak. Legyen A azaz esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás fej, és C azaz esemény, hogy a két dobás eredménye megegyezik. Mutassuk meg, hogy A, B, C páronként függetlenek, de nem függetlenek! (2 pont)
15. Thf. van 100 golyó, melyek valamekkora része (mondjuk x darab) feketére van festve, a másik fele ($100 - x$ db) pirosra. Húzzunk 3 golyót, a húzások sorrendjére való tekintet nélkül. Nézzük a következő eseményeket:
 $A := \{2 \text{ fekete, } 1 \text{ piros}\}$
 $B := \{\text{a kihúzott golyók között legalább } 1 \text{ fekete golyó van}\}$
a) Mi az eseménytér? Hány elemű?
b) $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) = ?$
c) Mennyit színezzünk a golyók közül feketére, hogy a fenti két esemény független legyen?
(3=1+1+1 pont)
16. 50% az esélye annak, hogy a királynő hordozza a hemofíliáért felelős gént. Ha hordozó, akkor mindegyik hercegnek 50–50% az esélye annak, hogy hemofíliás legyen. Ha a királynő 3 fia nem hemofíliás, akkor mekkora az esélye annak, hogy hemofíliás lesz? (2 pont)
17. Az α kocka 4 piros és 2 fehér, míg a β kockán 2 piros és 4 fehér lap van. Feldobunk egy érmét. Ha fej a dobás eredménye, akkor a továbbiakban az α kockát használjuk, ha pedig írás, akkor a β -t. Az így kiválasztott kockával n -szer dobunk.
a) Mi a valószínűsége, hogy a k -adik dobás eredménye piros, $k = 1, \dots, n$?
b) Feltéve, hogy mind az első $k - 1$ kockadobás eredménye piros, mi a valószínűsége, hogy a k -adik dobás eredménye piros lesz, $k = 1, \dots, n$?
(4=2+2 pont)
18. Magyar Etikett Intézet felmérése szerint Magyarországon a fiúk két kategóriába oszthatók: 2/3-uk udvarias, 1/3-uk udvariatlan. Az udvarias fiúk az esetek 90%-ban engednek előre a lányokat az ajtóban, az udvariatlanok viszont csak az esetek 20%-ban.
a) Mi annak a valószínűsége, hogy ha jön egy lány, akkor őt Jancsi előre fogja engedni?

- b) Mi annak a valószínűsége, hogy Jancsi udvariatlan, ha láttam, hogy Jutkát nem engedte előre az ajtóban?

(4=2+2 pont)

Figyelem!! Az első két részből összesen legfeljebb 23 pont gyűjthető össze. Be lehet adni 23 pontnál többet is, viszont ha valaki több pontot ér el, mint 23, akkor is csak 23 pontot visz tovább az eddigi feladatokból.

Diszkrét valószínűségi változók($\sum 18$ pont)

19. Legyen X valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei 0, 2, 4, 6, 8. Tudjuk, hogy az X c valószínűséggel lesz 0, $2c$ valószínűséggel lesz 2, $4c$ -vel lesz 4, $6c$ -vel lesz 6, $8c$ -vel lesz 8. Mennyi a c ?

(1 pont)

20. Legyen X valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei $0, 1, 2, 3, \dots$, az X súlyfüggvénye:

$$p(i) = \begin{cases} c \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^i & , \text{ ha } i = 1, 2, 3, \dots \\ 0, 1 & , \text{ ha } i = 0 \end{cases}$$

Mennyi a c ?

(2 pont)

21. Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást nevezzünk sikeresnek, ha a dobott számok összege prím. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozás között?

(2 pont)

22. Mi n kockadobás minimumának az eloszlása?

(2 pont)

23. Addig dobálok egy p valószínűséggel fejre mutató érmével, amíg végre fejre nem dobunk.

a) Mi a fej valószínűsége, ha az első fejjel várhatóan 23-szor kell dobunk?

b) Mi a valószínűsége, hogy először 3-dikra látok fejet?

c) Mi a valószínűsége, hogy az 5-dik fejet a 10-dik dobásnál látom?

(3=1+1+1 pont)

24. Egy embernek n kulcsa van, amelyek közül egyetlen nyit egy bizonyos ajtót. emberünk véletlenszerűen próbálkozik a kulcsokkal mindaddig, amíg rá nem talál a megfelelő kulcsra. Határozd meg a próbálkozások számának várható értékét, ha

a) a sikertelen kulcsokat nem zárja ki a további próbálkozások során (visszatevéses),

b) a sikertelen kulcsokat kizárja a további próbálkozások során (visszatevés nélküli)!

(4=1+3 pont)

25. Egy könyvben 10 oldalon volt egy, 2 oldalon pedig kettő gépelési hiba. Adjunk becslést, hogy hány oldalas lehet a könyv!

Milyen feltevéssel éltünk?

(4 pont)

Eloszlásfüggvény ($\sum 3 pont$)

26. Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, F a következő módon adott:

$$F(b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } b < 0 \\ b/4 & \text{ha } 0 \leq b \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4} & \text{ha } 1 < b \leq 2 \\ 11/12 & \text{ha } 2 < b \leq 3 \\ 1 & \text{ha } 3 < b \end{cases}$$

a) $\mathbb{P}(X = i) = ?$, $i = 1, 2, 3$

b) $\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = ?$

(3=2+1 pont)

Folytonos valószínűségi változók ($\sum 24 pont$)

27. Egy rendszer a bekapcsolástól számított X hónapig működik. Határozza meg X várható értékét, és annak a valószínűségét, hogy a rendszer legalább 5 hónapig működik, ha X sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} Cxe^{-x/2} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

(4 pont)

28. Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint (w mennyiséget). Hogyha a heti eladás (ezer literben mérve) egy vv

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{knben} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0,01-nél kisebb valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

(4 pont)

29. A buszok rendre minden óra egészkor, 15-kor, 30-kor és 45-kor indulnak a megállóból. Ha egyenletesen érkezem 7:00 és 7:25 között, akkor mi a valószínűsége, hogy

a) 5 percnél kevesebbet várok?

b) 8 percnél többet várok?

(3 pont)

30. Petőfi híd, budai hídfőnél a villamosok (egy adott irányba) csúcsidőben Exponenciális eloszlással érkeznek, 2,5perc várható értékkel.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy ha épp most ment el előttem egy villamos, akkor 3 percnél többet kell várnom.

b) Már várok 1 perce, de nem jött a villamos. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb még 1 percet kell várnom?

c) Tegyük fel, hogy a villamosok 2,5perc várható értékű, $1/3$ szórású normális eloszlás szerint érkeznek. Ezzel a feltevéssel oldjuk meg a)-t!

(6=2+2+2 pont)

31. Tegyük fel, hogy X normális eloszlású, 6 várható értékkel. Ha $\mathbb{P}(X > 10) = 0,2$, akkor közelítőleg mennyi X szórásnégyzete?

(3 pont)

32. Mennyi garanciát adjunk, ha azt szeretnénk, hogy a termékeknek legfeljebb 5 százalékát kelljen garanciaidőn belül javítani, ha a készülék élettartama 10 év várható értékű és 2 év szórású normális eloszlással közelíthető?
(4 pont)

Konvolúció($\sum 17 pont$)

33. Írjuk fel

- a) Két független, azonos paraméterű geometriai eloszlás súlyfüggvényét!
- b) Két független, azonos paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényét!
- c) Három független, azonos paraméterű geometriai eloszlás súlyfüggvényét!
- d) Három független, azonos paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényét!

(12=2+2+4+4 pont)

34. Határozzuk meg két független, különböző paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényét!
(5 pont)

Várható érték és szórásnégyzet tulajdonságai, kovariancia($\sum 16 pont$)

35. Legyen $X \sim N(3, 9)$, $Y \sim Exp(1/2)$, $Z \sim U(-2, 2)$ függetlenek. Határozd meg a következő mennyiségeket

- a) $\mathbb{E}(X + Y + Z) = ?$
- b) $\mathbb{D}^2(X + Y + Z) = ?$
- c) $\mathbb{E}(3X + \frac{Y}{2} - Z + 4) = ?$
- d) $\mathbb{D}^2(3X + \frac{Y}{2} - Z + 4) = ?$

(6=1+1+2+2 pont)

36. a) Leültetünk 10 házaspárt véletlenszerűen egy kerek asztalhoz. Jelölje X azon házaspárok számát, akik egymás mellé kerültek. Mi az X várható értéke és szórásnégyzete? (ZH-ra készüléshez: mennyiben változik a számolás, ha egyenes a pad?)
Tipp: Legyen X_i annak az eseménynek az indikátora, hogy az i -edik házaspár egymás mellé kerül, $i = 1, 2, \dots, 10$, vagyis $X_i = 1$, ha az i -edik házaspár egymás mellé ül, különben $X_i = 0$
- b) **(unatkozónak:)** Ugyanez, csak k házaspár van, vagyis $n = 2k$ embert ültetünk le összesen.

(10 pont)