

MODULÁRIS ÉS DISZTRIBUTIV HÁLÓK JELLEMZÉSE RÉSZHÁLÓKKAL

Definíció 1. Egy L hálót disztributivnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in L$ elemekre

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Definíció 2. Egy L hálót modulárisnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in L$ elemekre

$$x \leq z \Rightarrow (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z).$$

Tétel 1. (1) Egy L háló akkor és csak akkor disztributív, ha nem tartalmaz sem az N_5 -el, sem az M_3 -al izomorf részhálót.

(2) Egy L háló akkor és csak akkor moduláris, ha nem tartalmaz az N_5 -el izomorf részhálót.

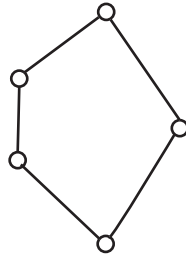


FIGURE 1. N_5

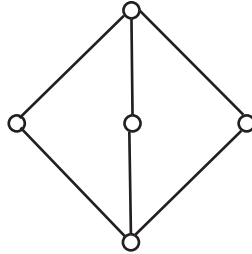


FIGURE 2. M_3

Bizonyítás. Csak (2)-et igazoljuk. Ha L tartalmazza N_5 -öt, akkor L nem moduláris, mert N_5 nem moduláris. Megfordítva, ha L nem moduláris, akkor igazoljuk, hogy részhálóként tartalmazza N_5 -t. Ez esetben létezik három elem x, y, z , hogy

$$x \wedge (y \vee z) \neq y \vee (x \wedge z).$$

Ekkor $x \wedge (y \vee z) > y \vee (x \wedge z)$. Kis számolással kapjuk, hogy a következő elemek az N_5 -el izomorf részhálót alkotnak: $y \wedge z, y \vee (x \wedge z), x \wedge (y \vee z), z, x \vee z$.