MODULÁRIS HÁLÓK ELEMI TULAJDONSÁGAI

1. Intervallumok izomorfizmusa

Tétel 1. *(Intervallumok izomorfiatétele). Egy L háló pontosan akkor moduláris, ha tetszőleges a, b elemeire az $[a \wedge b, a]$ intervallum izomorf a $[b, a \vee b]$ intervallummal a*

$$\varphi_{ab} : [a \wedge b, a] \to [b, a \vee b], x \mapsto b \vee x$$

izomorfizmus mellett, ennek inverze a

$$\psi_{ab} : [b, a \vee b] \to [a \wedge b, a], y \mapsto a \wedge y$$

izomorfizmus.

Bizonyitás. Legyen L moduláris háló. Ha $x \in [a \wedge b, a]$, akkor $\psi_{ab}(\varphi_{ab}(x)) = a \wedge (b \vee x) = (a \wedge b) \vee x) = x$ (ugyanis $x \leq a$, így alkalmazhatjuk a moduláris egyenőséget), továbbá $y \in [b, a \vee b]$ esetén $\varphi_{ab}(\psi_{ab}) = b \vee (a \wedge y) = (b \vee a) \wedge y = y$. Ennélfogva φ_{ab} és ψ_{ab} bijektiv továbbá egymás inverzei. Ezenkivül mindkét leképezés monoton, tehát izomorfizmusok.

Megforditva, tegyük fel, hogy az L bármely két elemére teljesül a tételben megfogalmazott izomorfizmus. Ha L nem moduláris, úgy tartalmazza részhálóként az N_5-t, amelyben nem teljesül a szóbanforgó izomorfizmus. ♣

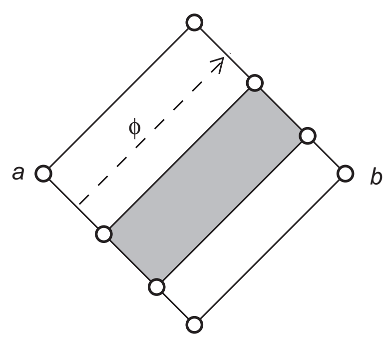

Figure 1. izomorf intervallunok

2. Kuros-Ore tétel

Tétel 2. *(A. G. Kuros, O. Ore). Bármely L moduláris háló rendelkezik a Kuros-Ore tuljdonsággal, azaz ha $a = b_1 \vee ... \vee b_n$ is és $a = c_1 \vee ... \vee c_m$ is az a elem előállitása egyesitésirreducibilis elemek irredundáns egyesitéseként, akkor $n = m$*

Date: 2007 március 22.

és az első egyesités bármely b_i tagja helyettesithető a második egyesités alkalmas tagjával, azaz bármely i-re ($1 \le i \le n$) létezik j ($1 \le j \le m$), hogy

$$a = b_1 \vee ... \vee b_{i-1} \vee c_j \vee b_{i+1} \vee ... \vee b_n.$$

Bizonyitás. Legyen $d = b_1 \vee ...b_{i-1} \vee b_{i+1} \vee ... \vee b_n$ és $e = b_i$. Ekkor $a = e \vee d$ és nyilván

$$a = (c_1 \vee d) \vee ... \vee (c_m \vee d).$$

Az intervallumok izomorfiatétele szerint ekkor

$$e = \psi_{ed}(a) = \psi_{ed}(c_1 \vee d) \vee ... \vee \psi_{ed}(c_m \vee d).$$

teljesül. Mivel $e = b_i$ egyesitésirreducibilis, valamely j-re $\psi_{ed}(a) = \psi_{ed}(c_j \vee d)$, igy $a = c_j \vee d$, azaz teljesul a tételben szereplő formula.

Igazoljuk, hogy $n = m$. Feltehető, hogy n a legkisebb olyan szám, hogy a előáll n darab egyesitésirreducibilis elem egyesitéseként, m pedig tetszőleges. A már igazolt helyettesitési tulajdonság alapján b_1 helyettesithető valamelyik c_{j_1}-vel, azaz

$$a = c_{j_1} \vee b_2 \vee ... \vee b_n.$$

Az n minimalitása miatt a fenti előállitás is irredundáns. Ezért b_2 is helyettesithető valamely c_{j_2}-vel, azaz

$$a = c_{j_1} \vee c_{j_2} \vee b_3 \vee ... \vee b_n.$$

Mivel n minimális $j_1 \neq j_2$ és most is a irredundáns előállitását kaptuk. Tehát a $b_1, ..., b_m$ elemek mindegyike sorban egymás után kicserélhető $c_{j_1}, ..., c_{j_n}$-re. Minden lépésnél a irredundáns előállitását kapjuk. Minden újabb c_{j_i} különbözik a megelőző $c_{j_1}, ..., c_{j_{i-1}}$ elemektől. Az utolsó csere után kapjuk, hogy $a = c_{j_1} \vee ... \vee c_{j_n}$ az a irredundáns előállitása, igy $\{j_1, ..., j_n\} = \{1, ..., m\}$. Ezért $n = m$. ♣

Következmény. Ha egy A algebra véges sok szubdirekt irreducibilis algebra szubdirekt szorzatára bontható és $\mathrm{Con}(A)$ moduláris, akkor A irredundáns módon is előáll véges sok szubdirekt irreducibilis algebra szubdirekt szorzatáként, és minden ilyen előállitásban a tényezők száma azonos.

Megjegyzés A moduláris egyenlőségnél a következő egyenlőtlenség mindíg teljesül:

$$x \le z \text{ esetén } (x \vee y) \wedge z \ge x \vee (y \wedge z).$$

Ezért, ha a modularitást akarjuk igazolni, úgy elegendő a fordított irányú egyenőtlenséget bizonyítani.

karjuk, hogy $L \subseteq N$ esetén:

$$(L \vee M) \cap N \subseteq L \vee (M \cap N).$$

Két normálosztó egyesítése $L \vee M$ megegyezik az $LM = \{xy, x \in L, y \in M\}$ szorzattal.

Tegyük fel, hogy $a \in (L \vee M) \cap N$. Ekkor $a = bc, (b \in L, c \in M)$. Igy $c = b^{-1}a \in N$. Ebből következik, hogy $c \in N$. Mivel $c \in M$ is teljesül, kapjuk, hogy $c \in M \cap N$, tehát $a = bc \in L \vee (M \cap N)$, azaz $(L \vee M) \cap N \subseteq L \vee (M \cap N)$. ♣