(II.) FIXPONT TÉTEL, GALOIS -KAPCSOLAT

Legyen az A halmazon $f : A \longrightarrow A$ egy leképezés. Ha valamely $a \in A$-ra $f(a) = a$, akkor a-t az f leképezés fixpontjának nevezzük.

Definició 1. *Legyen P részben rendezett halmaz. Ha bármely $P \longrightarrow P$ monoton leképezésnek van fixpontja, akkor azt mondjuk, hogy P rendelkezik a fixponttulajdonsággal.*

Tétel 1. *(1) (Knaster-Tarski tétel)Bármely tejes háló rendelkezik a fixponttulajdonsággal.*

(2) (Davis tétel) Ha az L háló rendelkezik a fixponttulajdonsággal. akkor L teljes.

Bizonyitás. Csak (1)-et igazoljuk.

(i). Legyen L teljes háló és $f : L \longrightarrow L$ egy monoton leképezés. Tekintsük a $B = \{x \in L : x \leq f(x)\}$ részhalmazt. Legyen $u = \bigvee B$. Tetszőleges $x \in B$-re $x \leq u$, igy f monotonitása miatt $f(x) \leq f(u)$. A tranzitivitás miatt $x \leq f(u)$, azaz $f(u)$ felső korlátja B-nek, ezért $u \leq f(u)$. A monotonitás miatt $f(u) \leq f(f(u))$, tehát $f(u) \in B$, vagyis $f(u) \leq u$ is teljesül, igy u fixpontja f-nek.

Galois kapcsolat.

A magasabbfokú egyenletek megoldásával foglalkozik a Galois elmélet, amely egy testelméleti problémát visszavezet egy csoport elméleti problémára résztesteknek megfeleltetve egy csoport bizonyos részcsoportjait. Ez az elmélet vezet el egy általánosabb fogalomhoz.

Definició 2. *Legyenek A és B részbenrendezett halmazok, $\alpha : A \longrightarrow B$ és $\beta : B \longrightarrow A$ leképezések. Ha mindkét leképezés rendezés forditó (azaz $a_1 \leq a_2 \in A$ esetén $\alpha(a_1) \geq \alpha(a_2)$ és $b_1 \leq b_2 \in B$ esetén $\beta(b_1) \geq \beta(b_2)$, továbbá a szorzat leképezések extenzivek (azaz $a \in A, b \in B$ esetén $a \leq \beta(\alpha(a))$ és $b \leq \beta(\alpha(b))$), akkor azt mondjuk, hogy az (α, β) leképezés pár* Galois-kapcsolat *az A és B között.*

Definició 3. *Legyenek A és B halmazok, $\varrho \subseteq A \times B$ pedig egy tetszőleges megfeleltetés. Legyen*

(1) $\alpha : P(A) \longrightarrow P(B)$, $X \mapsto \{y \in B : (x, y) \in \varrho$ minden $x \in X$-re$\}$

(2) $\beta : P(B) \longrightarrow P(A)$, $X \mapsto \{x \in B : (x, y) \in \varrho$ minden $y \in Y$-ra$\}$

Az (α, β) leképezéspárt — amely Galois kapcsolat $(P(A), \subseteq)$ és $(P(B), \subseteq)$ között — a ϱ megfeleltetés által létesitett Galois-kapcsolatnak nevezzük.

Mint emlitettük a Galois-kapcsolat eredete az un. Galois elmélet, ahol A test, B az A relatiiv automorfizmusanak csoportja. ϱ pontosan azon (a, b) párokból áll, amelyekre az a testelem fixpontja a b automorfizmusnak.

Állitás 1. *Legyen (α, β) Galois-kapcsolat az A és B részbenrendezett halmazok között. Ekkor az $\alpha \circ \beta : A \longrightarrow A, a \mapsto \beta(\alpha(a))$ leképezés lezárási operátor, a $\beta \circ \alpha : B \longrightarrow B, a \mapsto \alpha(\beta(b))$ leképezés pedig $B \longrightarrow B$ lezárási operátor.*

Date: February 14, 2009.

Bizonyitás. Legyen $\sigma = \alpha \circ \beta$ és $\tau = \beta \circ \alpha$. Mivel α és β rendezés forditó, ezért σ és τ monoton. Nyilván τ extenziv , ezért tetszőleges $a \in A$-ra, $\alpha(\beta(\alpha(a))) = \tau(\alpha(a)) \geq \alpha(a)$. Felhasználva, hogy β rendezésforditó, kapjuk, hogy $\beta(\alpha(\beta(\alpha(a)))) \leq \beta(\alpha(a))$ azaz $\sigma(\sigma(a)) \leq \sigma(a)$. Mivel σ extenziv, $\sigma(\sigma(a)) \geq \sigma(a)$ is teljesül, tehát σ idenpotens. σ tehát lezárási operátor, hasonlóan látható, hogy τ is az. ♣

Tétel 2. *Legyen $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetés, és tekintsük a 3. definicióban szereplő (α, β) Galois kapcsolaatot $P(A)$ és $P(B)$ között. Legyen $C \subseteq P(A)$ ill. $D \subseteq P(B)$ az $\alpha \circ \beta$, ill. $\beta \circ \alpha$ lezárási operátornak megfelelő lezárási rendszer az A ill. B halmazon. Ekkor a C és D teljes hálók duálisan izomorfak, az $\alpha|_C : C \longrightarrow D$ és $\beta|_D : D \longrightarrow C$ leképezések duális izomorfizmusok.*

Bizonyitás. Mint láttuk $\alpha \circ \beta$ és $\beta \circ \alpha$ lezárási operátor A-n ill. B-n. Legyen $X \in C$, azaz $X \in P(A)$ és $X = \beta(\alpha(X))$. Ekkor $(\beta \circ \alpha)(\alpha(X)) = \alpha(\beta(\alpha(X))) = \alpha(X)$, azaz $\alpha(X) \in D$. Tehát $\alpha|_C$ a C-t D-be képezi. Mivel $X \in C$-re $X \in C$-re $X = \beta(\alpha(X))$ és $Y \in D$ -re $Y = \alpha(\beta(Y)$, az $\alpha|_C$ és $\beta|_D$ leképezések egymás inverze. Mindkét leképezés duális izomorfizmus, mert α, β rendezésforditók. ♣