VÉGES DISZTRIBUTIV HÁLÓK REPREZENTÁCIÓJA

1. Véges disztributiv hálók struktúratétele

Az L háló a elemét egyesités-irreducibilis, ha $a = x_1 \vee x_2$-ből következik, hogy vagy $a = x_1$, vagy $a = x_2$. Duálisan definiáljuk a metszet-irreducibilis elem fogalmát. Az a elem egyesités prim, ha abból, hogy $a \leq x_1 \vee ... \vee x_n$ következik, hogy valamely i-re $(1 \leq i \leq n)$ $a \leq x_i$. $J(L)$ az L egyesitesirreducibilis elemeinek reszbenrendezett halmaza. $M(L)$ jelöli a metszet-irreducibilis elemek részbenrendezett halmazát.

Állitás 1. *Disztributiv háló minden egyesitésirreducibilis eleme egyesitesprim.*

Bizonyitás. Nyilván minden egyesitésprim elem egyesitésirreducibilis. Legyen L egy disztributiv háló, $a \in J(L)$, $x_1, ..., x_n \in L$ továbbá $a \leq x_1 \vee ... \vee x_n$. Ekkor

$$a = a \wedge (x_1 \vee ... \vee x_n) = (a \wedge x_1) \vee (a \wedge x_2) \vee .... \vee (a \wedge x_n)$$

Mivel a egyesitésirreducibilis, ezért valamely i-re $a = a \wedge x_i$, azaz $a \leq x_i$, vagyis a egyesitésprim. ♣

Legyen R részbenrendezett halmaz. $I \subseteq R$ rendezésideál, ha $b \leq a \in I$, úgy $b \in I$. Jelölje $\mathcal{H}(R)$ a rendezésideálok halmazát.

Tétel 1. *Bármely legalább kételemű L véges disztributiv hálóra $L \cong \mathcal{H}(J(L))$. Továbbá, a $\varphi : L \to \mathcal{H}(J(L)), x \mapsto (x] \cap J(L)$ leképezés izomorfizmus, amelynek inverze a $\psi : \mathcal{H}(J(L)) \to: L, A \mapsto \bigvee A$ leképezés.*

Bizonyitás. Mivel L véges, ezért minden $x \in L$ előáll egyesitésirreducibilis elemek egyesitéseként. Legyen $x \leq \bigvee_{a \in A} a$ egy ilyen előállitás. Nyilván $A \subseteq \varphi(x)$. Ezért $x \leq \bigvee_{a \in \varphi(x)} a =\leq x$, azaz

$$x = \bigvee_{a \in \varphi(x)} a = \psi(\varphi(x)).$$

Legyen $A \in \mathcal{H}(J(L))$, akkor állitjuk, hogy

$$\psi(\varphi(A)) = A.$$

Mivel A minden a elemére $a \leq \bigvee A = \psi(A)$ ezért a " $\supseteq$ " tartalmazás nyilvánvaló. Legyen továbbá $b \in \varphi(\psi(A))$, azaz $b \in J(L)$ és $b \leq \bigvee A$. Ekkor az 1. Állitás szerint valamely $a \in A$-ra $b \leq a$. Azonban $A \in \mathcal{H}(J(L))$ rendezésideál $J(L)$-nek, igy $b \in A$. Ezzel igazoltuk a " $\subseteq$ " tartalmazást. Igy $\varphi(\psi(A)) = A$. Ezek szerint φ és ψ egymás inverzei. Mivel monotonok is, ezért izomorfizmusok. ♣

Komplementumos disztributiv hálót *Boole algebrának* nevezzük. Ennek egyesitésirreducibilis elemei az atomok, azaz amelyek a 0 szomszédai. $J(L)$ tehát rendezetlen halmaz, igy $\mathcal{H}(J(L))$ nem más mint a P(J(L)) hatványhalmaz, tehát minden véges disztributiv háló izomorf egy hatványhalmazhoz.

Egy véges n-elemű lánc hossza $l(C)$, $n-1$. Egy véges L háló hossza $l(L)$ a benne lévő maximális láncok hosszának szuprémuma.

Date: 2007 március 1.

Állitás 2. *Véges disztributiv hálónál* $l(L) = |J(L)|$. *Ebből következik, hogy* $|J(L)| = |M(L)|$.

Bizonyitás. Legyenek $0 = c_1 \prec .... \prec c_n$ a C maximális lánc elemei. Teljes indukciót alkalmazunk a C hosszára. Tegyük fel, hogy az $(c_{n-1}]$ ideálra igaz az állitás. Legyen d a legkisebb olyan elem, amelyre $d \vee c_{n-1} = 1$. Könnyen látható, hogy d az egyetlen egyesitésirreducibilis elem, amely nincs $(c_{n-1}]$-ben, tehát egy-egyértelmű megfeleltetés van C ill. $J(L)$ elemei között. ♣

2. Véges disztributiv hálók elemeinek előállitása irreducibilis elemekkel

Definició 1. *Legyen* L *háló és legyenek* $a_1, ..., a_n \in L$ *tetszőleges elemek. Ha* $i = 1, ..., n$*-re* $a_1 \vee .... \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee .... \vee a_n \neq a_1 \vee ... \vee a_n$, *akkor az* $a_1 \vee ... \vee a_n$ *egyesitest irredundáns (rövidithrtetlen) egyesitésnek nevezzük.*

Tétel 2. *Véges disztributiv háló bármely eleme eőállitható egyesitesirreducibilis elemek irredundáns egyesitéseként., amely — a tényezők sorrendjétől eltekintve – egyértelmű*

Bizonyitás. Tekintsük az L véges disztributiv hálót és legyen $x \in L$. Legyenek $a_1, ..., a_n$ $\varphi(x) = (x] \cap J(L)$ maximális elemei. Ekkor nyilván

$$x = a_1 \vee ... \vee a_n.$$

Legyen $x = b_1 \vee ... \vee b_m$ az x egy tetszőleges előállitása egyesitésirreducibilie elemek egyesitéseként. Igazoljuk, hogy:

$$\{a_1, ..., a_n\} \subseteq \{b_1, ...b_m\}.$$

Valóban tetszőleges i-re $(1 \leq i \leq n)$ $a_i \leq x = b_1 \vee ... \vee b_m$, igy valamely j-re $(1 \leq j \leq m)$ teljesül, hogy $a_i \leq b_j$. Tekintettel arra, hogy $a_i, b_j \in \varphi(x)$ és $\varphi(x)$-ben a_i maximális elem, kapjuk, hogy $a_i = b_j$, azaz $a_i \in \{b_1, ..., b_m\}$.