KÜRSCHÁK JÓZSEF ALGEBRAI MUNKÁSSÁGÁRÓL*

SCHMIDT TAMÁS

Algebrával foglalkozó monográfiában — szinte valamennyiben — találkozhatunk Kürschák József nevével. Talán kevéssé ismeretes, hogy a 20. században kifejlődött ún. modern algebra egyik legszebb elméletének éppen Kürschák a „szülőapja". Ezt az elméletet ma értékeléselméletnek nevezzük. Meglepő, hogy ez az elmélet, amely a gyakorlati alkalmazások szempontjából is jelentős, Kürschák egyetlen algebrai dolgozatának köszönhető (Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, *J. reine u. angew. Math.* **142** (1913), 211—253). Másrészről Kürschák József munkásságát méltató tanulmányok ezt a legjelentősebb alkotásaként említik. Jelen ismertetésben ezen elmélet lényegét szeretném bemutatni.

Mindenekelőtt azt vizsgáljuk meg, hogy a racionális számok testéből kiindulva, hogyan juthatunk el a valós számokhoz. Leggyakrabban a Dedekind-féle szeletalkotást használják, de régóta ismeretes egy másik módszer is, amely a racionális számok testének, **Q**-nak az elrendezettségén, ill. az abszolút érték fogalmán nyugszik. (Általában egy K test elrendezett, ha elemei között értelmezve van egy $\leqq$ ún. rendezési reláció, hogy bármely két elemre $a \leqq b$ vagy $b \leqq a$ teljesül, ezenkívül $a \leqq b$ és $c \leqq d$ esetén $a+c \leqq b+d$, továbbá $a \leqq b$, $0 \leqq c$ maga után vonja $ac \leqq bc$-t.) Az $a \in \mathbf{Q}$ abszolút értéke $|a|$, az a és $-a$ közül a nemnegatív. Segítségével értelmezhetjük az alapsorozatot, ami egy olyan $[a_i] = \{a_1, a_2, \dots\}$ sorozat, hogy minden pozitív $\varepsilon \in \mathbf{Q}$-hoz létezik egy $n = n(\varepsilon)$ természetes szám, amelyre teljesül, hogy $|a_p - a_q| < \varepsilon$, valahányszor $p, q > n$. Ha $[a_j]$ és $[b_i]$ alapsorozatok, akkor képezni tudjuk ezek összegét, a $c_n = a_n + b_n$, illetve szorzatát a $d_n = a_n b_n$ szabályok segítségével. Könnyű látni, hogy ezen műveletekre nézve a **Q**-ból képezhető alapsorozatok egy R gyűrűt alkotnak. Egy $[a_i]$ sorozat nullsorozat („0-hoz konvergál"), ha minden ε-hoz létezik olyan n, amelyre $|a_p| < \varepsilon$, ha $p > n$. A nullsorozatok az R gyűrűnek egy $\mathcal{I}$ ideálját alkotják. Az $R/\mathcal{I}$ maradékosztálygyűrű (más néven faktorgyűrű) éppen a valós számok **R** teste. Ha $a \in \mathbf{Q}$-nak megfeleltetjük az $a, a, a, \dots$ konstans sorozatot, úgy a **Q**-nak **R**-be való beágyazását nyerjük.

A leírt konstrukció természetesen régóta jól ismert, de Kürschák észrevette, hogy igen jelentős mértékben általánosítható. Minden valószínűség szerint elméletének megalkotásához döntő módon járult hozzá, hogy K. Hensel 1908-ban megjelent könyvében (Theorie der algebraischen Zahlen) bevezette az ún. p-adikus számok fogalmát.

Testek általában nem elrendezhetők, például a komplex számok teste sem az, hiszen amennyiben $i > 0$ lenne, akkor négyzetre emelve $-1 = i^2 > 0$ adódna, majd

* Kürschák József születésének 125. évfordulója alkalmából 1989. március 21-én a Magyar Tudományos Akadémián elhangzott előadás.

ezen két egyenlőtlenséget összeszorozva $-i>0$-t kapunk, ami ellentmond $i>0$-nak. Hasonlóan nyerünk ellentmondást, ha $i<0$. Ezt a nehézséget Kürschák a következő ötlettel hidalta át. Legyen $\mathcal{K}$ egy test és tekintsünk egy további, de elrendezett K testet (amely többnyire vagy a racionális vagy a valós számtest). Egy $\varphi: \mathcal{K} \to K$ leképezést a $\mathcal{K}$ értékelésének nevezzük, ha a következők teljesülnek:

(1) $\varphi(a) > 0$, ha $a \neq 0$ és $\varphi(0) = 0$,

(2) $\varphi(a+b) \leqq \varphi(a)+\varphi(b)$,

(3) $\varphi(ab) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$.

Ez esetben $\mathcal{K}$ ún. értékelt test. A legegyszerűbb példa, ha $\varphi(a)=1$ minden $a\neq 0$ elemre, ez az ún. triviális értékelés. Amennyiben $\mathcal{K}$ megegyezik **Q**-val, úgy $\varphi(a)=|a|$ az abszolútérték értékelés. $[a_i]$ alapsorozat, ha minden pozitív $\varepsilon\in K$-hoz létezik olyan n, hogy $\varphi(a_p-a_q)<\varepsilon$, amennyiben $p, q>n$. Egy alapsorozatnak a φ-határértéke az $a\in\mathcal{K}$, ha minden ε-hoz létezik olyan n, hogy $\varphi(a_p-a)<\varepsilon$, ha $p>n$. Nullsorozat olyan alapsorozat, amelynek létezik φ-határértéke, és az 0. A már említett módon az alapsorozatok összegét és szorzatát értelmezhetjük és ily módon egy R gyűrűt kapunk, amelynek a nullsorozatok egy $\mathcal{I}$ ideálját képezik. Tekintsük a $\bar{\mathcal{K}}=R/\mathcal{I}$ maradékosztály gyűrűt, amelyről kimutatható, hogy test, amelynek $\mathcal{K}$ részteste. Erre a $\bar{\mathcal{K}}$ testre a φ értékelést kiterjeszthetjük. Kimutatható, hogy $\bar{\mathcal{K}}$ ez ismertetett konstrukcióval tovább már nem bővíthető, azaz ha $\bar{\mathcal{K}}$ elemeiből képezünk alapsorozatokat, akkor ezeknek mindig van $\bar{\mathcal{K}}$-ban φ-határértéke. Ez indokolja az elnevezést is, ti. $\bar{\mathcal{K}}$-t a $\mathcal{K}$ perfekt burkának nevezzük. A **Q** perfekt burka az abszolútérték értékelésre nézve a valós számtest. Vajon létezik-e ettől lényegesen eltérő példa? Itt jelennek meg a már említett p-adikus számok. Legyen p egy rögzített prímszám, akkor minden r racionális szám egyértelműen írható

$$r = \frac{k}{l}\cdot p^{\omega_p(r)}$$

alakba, ahol k és l p-vel nem osztható egészek. Az r racionális szám p-adikus értékelése $\omega_p(r)$. Ennek segítségével előálló perfekt test $\mathbf{Q}_p$ (a **Q** p-adikus burka) a p-adikus számok teste. Ezek a számok $\alpha=a_m p^n+a_{m+1}p^{m+1}+\dots$ alakban írhatók, ahol $a_i=0, 1, \dots, p-1$.

Kürschák elméletét A. Ostrowski fejlesztette tovább és tette teljessé. Fő tételei mutatják, hogy milyen kiváló érzékkel nyúlt az abszolútérték fogalmának általánosításához. Kimutatta ugyanis, hogy **Q** valós értékelései (tehát amikor $K=\mathbf{R}$) a triviális, az abszolútérték és a p-adikus értékelések. A másik Ostrowski tételhez szükségünk van az archimedesi elrendezésre, ami azt jelenti, hogy minden $a\in K$-hoz létezik olyan n természetes szám, amelyre $n\cdot 1>a$ (1 a K egységeleme). Ostrowski kimutatta, hogy archimedesien értékelt perfekt test csupán kettő létezik, a valós számtest és a komplex számok teste.

Azok számára, akik részletesen meg szeretnének ismerkedni az értékeléselmélettel, Rédei László „Algebra" c. monográfiáját ajánlhatom, ahol egy teljes fejezet foglalkozik ezen elmélettel.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЙОЖЕФА КЮРШАКА

Т. ШМИДТ

ON THE ALGEBRAIC WORK OF JÓZSEF KÜRSCHÁK

T. SCHMIDT