GEOMETRIAI TEREK AZ ALGEBRA SZEMSZÖGÉBŐL

SCHMIDT TAMÁS

A geometriában pontokkal, egyenesekkel, síkokkal foglalkozunk és a közöttük fenálló kapcsolatokat vizsgáljuk. Mindenekelőtt az egzakt tárgyalás érdekében bizonyos alaptulajdonságokat – ún. axiómákat – kell rögzíteni. Ilyen pl. az, hogy bármely két, különböző ponton át pontosan egy egyenes megy át vagy az, hogy két különböző egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet. Különféle geometriai térfogalom ismeretes, ezeket axiómákkal adjuk meg. A legismertebbek a projektív terek, amelyek elemeivel itt megismerkedünk. Ezek közül is az ún. véges projektív síkokról ejtünk néhány szót.

Mit értünk projektív sík alatt? Először is adva vannak a pontok, amelyek egy G halmazt alkotnak. Egyeneseket úgy tudunk megadni, hogy megmondjuk mely pontokat tartalmazza. Az egyenes tehát nem más mint a G-nek egy részhalmaza. A projektív síkot tehát úgy tekinthetjük, hogy az egyrészt egy G halmaz, másrészt a G-nek bizonyos kitüntetett részhalmazai – az egyenesek összessége. Ezek a következő axiómáknak kell, hogy eleget tegyenek:

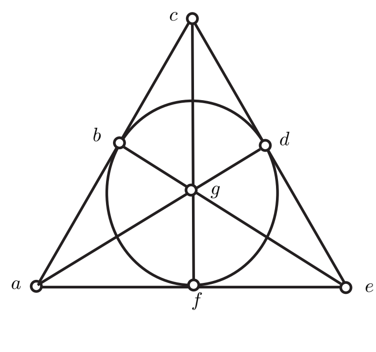
A projektív sík axiómái:

(P_1) Két tetszőleges ponthoz egy és csak egy egyenes van, amelyen a két pont rajta fekszik.

(P_2) Két különböző egyenesnek egy és csak egy közös pontja van.

(P_3) Van négy pont, amelyek közül bárhogy választunk ki 3 pontot, azok nem fekszenek egy egyenesen.

A (P_3) axióma csak azért szükséges, hogy triviális eseteket kizárjunk. A legkisebb elemszámú projektív síknak 7 pontja van ez az ún. *Fano sík*, amelyet a következő 1. ábra szemléltet. Itt 7 pont van, amelyeket $a, b, ..., g$ jelöl. Egyenesek pedig az ábrán látható hat egyenes és a kör (ami persze úgy értendő, hogy a {b,f,d} ponthármas alkot egy egyenest).



1. ábra. A Fano sik

Date: 2004. január 8.

Hogyan tudunk további példákat adni véges projektív síkokra? Ennek a legegyszerűbb módja, ha számtesteket hívunk segítségül. A következő lépésként bevezetjük a test fogalmát.

Kommutatív testnek nevezünk egy K halmazt, ha abban értelmezve van két művelet, amelyeket összeadásnak és szorzásnak nevezünk, jelölésük $a+b, ab$, melyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

(1) Ha a, b a K elemei, úgy $a+b, ab$ is a K elemei,
(2) $a+b=b+a, a+(b+c)=(a+b)+c$, $ab=ba$, $a(bc)=(ab)c$ és érvényes a disztributivitás $a(b+c)=ab+ac$,
(3) K-ban van két kitüntetett elem 0 és 1,
(4) az $a+x=0$ minden a-ra megoldható, megoldása $-a$,
(5) az $ax=1$ minden a-ra megoldható, megoldása a^{-1}, vagy másképp jelölve $1/a$.

Testre példa a racionális, a valós számok testei. Könnyen megadhatunk véges elemszámú testet. Legyen p egy prímszám és tekintsük a $0,1,2,...,p-1$ egész számokat és az összeadást és szorzást úgy definiáljuk, hogy elvégezzük a műveleteket az egész számok között és az eredményt p-vel elosztjuk és a maradék lesz az összeadás ill. szorzás eredménye. Ez a $GF(p)$ test. Ennek p eleme van. Kimutatható, hogy egy véges testnek p^k számú eleme van és minden prímhatványhoz pontosan egy ilyen test létezik, amelyet $GF(p^k)$ jelöl.

A $GF(p)$ test elemeiből a következőképen tudunk egy véges projektív síkot létrehozni. Képezzük az összes $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ elemhármast, amelynek elemei nem mind egyenlők nullával. Amennyiben λ a $GF(p)$ test tetszőleges 0-tól különböző eleme, akkor az $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ és $\langle \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\rangle$ számhármasokat ugyanazon pont különböző előállításainak tekintjük. x_1, x_2, x_3 a pont projektív koordinátái.

Most áttérünk az egyenesek definiálására. Legyen a_1, a_2, a_3 a $GF(p)$ három eleme, amelyek nem mind nullák. Az $[a_1, a_2, a_3]$ egyenes mindazon $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ pontokat tartalmazza, amelyekre

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Egyszerűen kimutatható, hogy az így definiált pontok és egyenesek egy projektív síkot alkotnak. Lássuk be pl. a (P_1) axióma teljesülését. Legyen $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ és $\langle y_1, y_2, y_3\rangle$ két különböző pont. Az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$
$$a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van az a_1, a_2, a_3 mint ismeretlenekre nézve, azaz ponosan egy egyenes tartalmazza az adott két pontot. Teljesen hasonlóan igazolható a (P_2) axióma is.

A legkisebb elemszámú test kételemű, $GF(2)$ amelynek elemei $0, 1$. E két szám segítségével készítsük el a követketkező elemhármasokat:

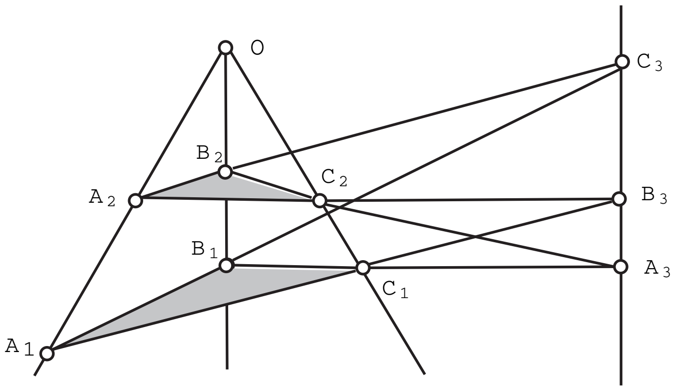
$b=\langle 1,0,0\rangle, f=\langle 0,1,0\rangle, e=\langle 0,0,1\rangle, d=\langle 1,1,0\rangle, g=\langle 1,0,1\rangle, a=\langle 0,1,1\rangle, c=\langle 1,1,1\rangle$.

Ez pontosan az elöbbiekben definiált Fano sík. (E speciális esetben minden pont csak egyféleképen koordinatizálható.) Azt látjuk, hogy a Fano sík számokkal ill. koordinátákkal is megadható. Ezért azt mondjuk, hogy a Fano sík koordinatizálható. Ezzel lehetővé vált, hogy a geometriai fogalmakkal számolhassunk, tehát a teret alkotó pontok, egyenesek algebrai alakot öltöttek. Ezt nevezzük analitikus geometriának is.

Természetesen adódik a kérdés, hogy vajon minden véges projektív síkot megkaphatunk-e a fenti módon egy véges test segítségével? A válasz nemleges, de hogy melyek koordinatizálhatók arra egy szép és meglepő választ fogunk adni.

Az elemi geometriai tételek hosszú sorában szerepel egy híres tétel, a *Desargues tétel*, amely a következőt mondja ki: ha az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 átmennek egy 0 ponton, akkor az A_1B_1, A_2B_2 egyenesek metszéspontját C_3-al, az A_1 és C_1, A_2 és C_2 egyenesek metszéspontjait B_3-al, az B_1C_1, B_2C_2 egyenesek metszéspontját A_3-al jelölve az A_3, B_3, C_3 pontok egy egyenesen fekszenek. Lásd a 2. ábrát.

Könnyű igazolni, hogy az előbbi példákban szereplő projektív síkokban teljesül a Desargues tétel.



2. ábra. A Desargues tétel

Létezik olyan projektív sík, amelyben nem teljesül a Desargues tétel.

Kimutatható, hogy egy véges projektív sík pontosan akkor koordinatizálható, ha teljesül benne a Desargues tétel. Ezzel a Desargues tétel fontos szerephez jutott, ő a felelős a geometria koordinatizálhatóságért.

A projektív sík kétdimenziós. Hogyan lehet egy magasabb dimenziós projektív teret definiálni? Az (P_1) axióma változatlan, viszont (P_2)-t módosítani kell, hiszen lehet két olyan egyenes amelyeknek nincs közös pontja (kitérő egyenesek), két egyenesnek pontosan akkor van közös pontja, ha azok egy síkban vannak. Ezt fogalmazza meg a:

(P_2') **Pasch axioma**. Ha egy nem elfajuló háromszög két oldalegyenesét egy további egyenes a háromszög csúcspntjaitól különböző pontokban metszi, akkor ez az egyenes a háromszög harmadik oldalegyenését is metszi.

Magasabb dimenziós projektív tereket hasonló módon állíthatunk elő test segítségével. Az $n > 2$ dimenziós teret úgy kapjuk, hogy elem $n + 1$-eseket tekintünk. Meglepő, hogy a 3 és annál magasabb dimenziós projektív terekben mindig teljesül a Desargues tétel, ily módon koordinatizálhatók. Ez egyben azt is jelenti, hogy egy olyan projektiv sík amelyben nem teljesül a Desargues tétel nem lehet benne egy magasabb dimenziójú projektív térben.

Mint a bevezetőben már említettük a geometriai teret az jellemzi, hogy az alterei között milyen tartalmazási viszonyok érvényesek. Az alterek a pontok G halmazának részhalmazai, és így a halmazelméleti tartalmzás egy rendezést határoz meg az alterek halmazán. Két altér közös része (metszete) ismét altér, amely az adott két altér legnagyobb alsó korlátja. Két altér halmazelméleti egyesítése általában nem altér, de létezik egy legszűkebb altér amely őket tartalmazza. Ez tehát a két altér legkisebb felső korlátja. Ez azt jelenti, hogy az alterek részben rendezett halmaza olyan, hogy ott bármely két elemnek létezik legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja. Az ilyen részben rendezett halmazt hálónak nevezzük. Mivel a legkisebb felső és legnagyobb alsó korlát egyértelműen meghatározottak, ezért tekinthetjük ezeket algebrai műveleteknek, elnevezésük egyesítés $a \vee b$ ill. metszet $a \wedge b$. A háló tehát egy speciális algebrai struktúra, amelyet a geometriai térhez hozzárendehetünk és amely jellemzi a teret.

A huszadik század elején a fizikában két elmélet állt az érdeklődés középpontjában. Az egyik az Einstein féle relativitás elmélet, a másik a *kvantummechanika*. Az utóbbi matematikai modelljét kísérelték meg leírni, amikor a 30-as években *Neumann János* bekapcsolódott e munkába. Mint a matematika megannyi területén itt is sikerült igen jelentőset alkotnia. A kvantummechanika matematikai modelljének megadásához a projektív geometriáknak egy általánosítását adta, amelyeket *folytonos geometriának* nevezett. Ennek egyik érdekessége, hogy nincsenek pontok, minden altér tartalmaz egy másik alteret. Míg a projektiv geometriánál az alterek dimenziói az $1, 2, ..., n$ temészetes számok valamelyike, addig a folytonos geometriánál az altér dimenziója egy tetszöleges 0 és 1 közötti valós szám lehet, ez a tulajdonság utal az elnevezésben szereplő folytonosságra. A folytonos geometria valójában egy speciális háló. Neumann bebizonyította, hogy ezek is koordinatizálhatók, de nem testekkel, hanem általánosabb struktúrákkal ún. gyűrűkkel, amely annyiban különbözik mint a testektől, hogy az 1 elem létezését és a (5) tulajdonságot nem követeljük meg.