MŰEGYETEM 1782

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**

Természettudományi Kar

# SZAKDOLGOZAT

## Elégséges mátrixok

*Készítette*
Schrempf Dóra

*Témavezető*
Dr. Illés Tibor

2016.

# Tartalomjegyzék

# 1. fejezet

# Bevezetés

Szakdolgozatomban részletes áttekintést adunk a lineáris komplementaritási feladat (LCP) megoldhatóságában kitüntetett mátrixosztályról, az elégséges mátrixokról. A lineáris komplementaritási feladat a következő:
keressük azon $\mathbf{x}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ vektorokat, melyekre

$$\left.\begin{aligned} -M\mathbf{x} + \mathbf{s} &= \mathbf{q} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{s} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \quad (LCP)$$

teljesül, ahol $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ és $(\mathbf{x} \circ \mathbf{s})$ a vektorok Hadamard-szorzata, mely a koordinátánkénti szorzást jelenti. Ezen probléma mind a mai napig intenzíven kutatott területe a matematikai programozásnak. Számos könyvet és számos cikket publikáltak az LCP témakörében. Ez annak köszönhető, hogy az elméleti eredmények mellett széles körű és fontos gyakorlati alkalmazásai vannak a mérnöki és gazdasági feladatokban is egyaránt. A feladat megoldására az utóbbi évtizedekben számos módszert fejlesztettek ki.

A lineáris programozási feladatokkal ellentétben az LCP-feladatok nem oldhatók meg polinomiális idő alatt, azaz a probléma $\mathbb{NP}$-teljes. Ebből kifolyólag vizsgálódásaink középpontjában egyrészt azon mátrixosztályok részletes bemutatása áll, melyek valamilyen szép tulajdonsággal rendelkeznek az LCP-feladattal kapcsolatban, másrészt a szakdolgozat címét is adó, elégséges mátrixok osztályának elemzése. Hiszen tudjuk, ha a feladat $M$ együttható mátrixa úgynevezett elégséges mátrix, akkor rendelkezésünkre áll hatékony megoldó algoritmus.

Cottle, Pang és Venkateswaran [10] definiálták először az elégséges mátrixokat. Úgy tekintünk ezen mátrixosztályra, mint a $\mathcal{P}$ és PSD mátrixok általánosításainak halmaza. Majd Väliaho, kinek nevéhez számos eredmény fűződik a témakörben, megmutatta, hogy az elégséges mátrixok megegyeznek a $\mathcal{P}_*$ mátrixokkal [12]. Azonban az $M$ együttható mátrix elégségessége nehezen ellenőrizhető tulajdonság, ezidáig csak Väliaho által kifejlesztett rekurzív módszerek léteznek, [17] melyek nem polinomiálisak.

Szakdolgozatom önálló eredményeként minél több különböző méretű elégséges mátrix meghatározására törekedtünk, különböző módszerek segítségével. Egyrészt Väliaho rekurzív eljárását [17] MATLAB-ban beprogramozva végeztünk kísérleteket, kerestünk elégséges mátrixokat úgy, hogy egy tetszőleges $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(n-1)$-ed rendben elégséges mátrixról megállapítottuk, hogy $n$-ed rendben is elégséges-e. Másrészt az ismert $(2 \times 2)$-es mátrixok esetén fennálló szabályokat próbáltuk kiterjeszteni $(3 \times 3)$-as mátrixokra úgy, hogy a bal felső $(2 \times 2)$-es négyzetes részre egy elégséges mátrixot helyeztünk, majd a többi elemet úgy választottuk meg, hogy a mátrix elégséges maradjon. Végül pozitív szemidefinit mátrixokhoz közeli elégséges mátrixokat határoztunk meg ismert definíciók és tételek segítségével, majd becslést adtunk ezen mátrixok szükséges kappájára.

# 2. fejezet

# Elégséges mátrixok és tulajdonságai

Ezen fejezet célja, hogy megismerkedjünk olyan mátrixosztályokkal, melyek kapcsolatban állnak szakdolgozatom fő témájával, az elégséges mátrixokkal. Majd részletesen kitérünk az elégséges mátrixok osztályának fő tulajdonságaira.
Napjainkban az operációkutatás egyik legkutatottabb területe a lineáris komplementaritási feladat (LCP). Azonban az LCP problémát megoldó algoritmusnak szüksége van azon ismeretre, hogy az input mátrix rendelkezik-e az elégséges tulajdonsággal. Így nem meglepő, hogy ilyen nagy figyelmet fordítunk ezen mátrixosztály megismerésére.
Az LCP-vel kapcsolatos mátrixosztályok családja hatalmas és változatos. Cottle tanulmányával [1] ellentétben, ahol összegyűjtöttek mintegy 65 mátrixosztályt, ezen szakdolgozat keretei között csak 7 osztállyal ismerkedünk meg, úgy mint a $\mathcal{P}, \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_*(\kappa), \mathcal{P}_*$, sor elégséges, oszlop elégséges, és az elégséges mátrixok osztályaival.

## 2.1. $\mathcal{P}$ és $\mathcal{P}_0$ mátrixok

1962-ben Fiedler és Ptak [2] az LCP-től függetlenül definiálták a $\mathcal{P}$ mátrixok osztályát. Később azonban Cottle tanulmányában [16] megismertette az LCP problémák és a $\mathcal{P}$ mátrixosztály között fennálló kapcsolatot.
A $\mathcal{P}$ mátrix definíciójának megértéséhez ismernünk kell a főminor fogalom jelentését [3].

**2.1.1. Definíció.** *Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot $\mathcal{P}$ mátrixnak nevezünk, ha minden főminorja pozitív.*

**2.1.1. Példa.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,9 \\ -10 & -9 & 1 \end{bmatrix}$

**2.1.1. Megjegyzés.** *Ha egy $\mathcal{P}$ mátrix szimmetrikus, akkor az pozitív definit mátrix.*

A következő lemmában a $\mathcal{P}$ mátrix jellemzőit foglaljuk össze. Az első 5 állítás Fiedler és Ptak [2] eredményei, míg a többi bizonyítása [4],[5],[6],[7],[8] alatt található.

**2.1.1. Lemma.** *Az adott $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak a következő tulajdonságai ekvivalensek:*

1. $M \in \mathcal{P}$
2. *Minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ vektorra létezik egy $i$ index, amelyre teljesül a következő: $\boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i > \boldsymbol{0}$.*

   *Átfogalmazva: Ha $\forall i$-re teljesül, hogy $\boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i \leq \boldsymbol{0}$, akkor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.*
3. *Minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ vektorhoz létezik egy $D_x$ pozitív diagonális mátrix, melyre a következő teljesül: $\boldsymbol{x}^T D_x M\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$.*
4. *Minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ vektorhoz létezik egy $H_x$ nemnegatív diagonális mátrix, amelyre teljesül a következő: $\boldsymbol{x}^T H_x M\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$.*
5. *Az $M$ mátrix minden valós sajátértéke pozitív. (Valamint ugyan ez teljesül az $M$ mátrix diagonális részmátrixára is.)*
6. $M^{-1} \in \mathcal{P}$
7. *$M$ minden diagonális részmátrixa is $\mathcal{P}$-beli.*
8. *Létezik olyan $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ vektor, amelyre $M\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, valamint az $M$ mátrixon végrehajtott diagonálisbeli elemen való pivotálás után kapott mátrix kielégíti azt a feltételt, miszerint a sorok megegyeznek a nempozitív diagonálissal.*
9. *Az $M$ mátrix minden diagonálisbeli eleme és minden diagonálisbeli elemen való pivot transzformációja is pozitív.*
10. *$M + D \in \mathcal{P}$, ahol $D$ nemnegatív diagonális mátrix.*
11. *$\det(I - \Lambda + \Lambda M) > 0$ minden $\Lambda$ diagonális mátrixra, amely nemnegatív és kevesebb, mint egy diagonálisbeli eleme van ($0 \leq \Lambda \leq I$).*
12. *$I - \Lambda + \Lambda M \in \mathcal{P}$ minden $\Lambda$ diagonális mátrixra ($0 \leq \Lambda \leq I$).*
13. *Minden $J \subseteq I$ esetén $(E^J M E^J)\boldsymbol{x} > 0$-nak van $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ megoldása. Itt $E^J$ egy $(n \times n)$-es diagonális mátrix, amelyre $(E^J)_{jj} = -1$ $(j \in J)$ és $(E^J)_{kk} = 1$ $(k \notin J)$.*

Az utolsó állítás megértéséhez ismertetnünk kell a bevezetett jelölést. Legyen $J, K \subseteq I$ és $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ekkor $A_{JK}$-val jelöljük az $A$ azon részmátrixát, melynek sorai $J$-ből, oszlopai pedig $K$-ból kerülnek ki, azaz $A_{JK} = (a_{jk})_{j\in J, k\in K}$. Az $A_{JJ}$ mátrixot diagonális részmátrixnak nevezzük. Továbbá az

$$A = \begin{pmatrix} A_{JJ} & A_{JK} \\ A_{KJ} & A_{KK} \end{pmatrix}$$

mátrix diagonális részmátrixán végzett pivotáláson azt a transzformációt értjük, amelyiknek az eredménye a következő mátrix:

$$\begin{pmatrix} A_{JJ}^{-1} & -A_{JJ}^{-1}A_{JK} \\ A_{KJ}A_{JJ}^{-1} & A_{KK} - A_{KK}A_{JJ}^{-1}A_{JK} \end{pmatrix}$$

amelyben $A_{JJ}$ nemszinguláris.

Most pedig rátérünk a lemma néhány fontos esetének a bizonyítására.

*Bizonyítás.* (első 5 állítás)

1. $\Rightarrow$ 2. : Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre $\mathbf{x}(M\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ minden $i = 1, \ldots, n$ indexre. Legyen $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ azon indexek halmaza, melyekre $\mathbf{x}_i \neq 0$. Olyan $\mathbf{x}$ vektort tekintettünk, melyre a $J$ indexhalmaz nem üres. Mivel $M$ egy $\mathcal{P}$ mátrix, így $\det(M_{JJ}) \neq 0$, és így $M_{JJ}\mathbf{x}_J \neq \mathbf{0}$. Ekkor van olyan $D$ nemnegatív átlójú, nem azonosan nulla, $|J| \times |J|$ méretű diagonális mátrix, melyre $M_{JJ}\mathbf{x}_J = -D\mathbf{x}_J$. Vagyis az $(M + D)$ mátrix szinguláris, emiatt
$0 = \det(M + D) = \sum_{I \bigcup K = \{1,\ldots,n\}} detD_{II} \det M_{KK}$
ami nem lehetséges a $\mathcal{P}$ mátrix osztály definíciója, és a $D$ tulajdonságai miatt.

2. $\Rightarrow$ 3. : Legyen $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ és $i$ olyan index, melyre $\mathbf{x}_i(M\mathbf{x})_i > \mathbf{0}$. A feltétel szerint választható ilyen index. Kellően pici $\epsilon > 0$ esetén
$\mathbf{x}_i(M\mathbf{x})_i + \epsilon \sum_{j \neq i} \mathbf{x}_j(M\mathbf{x})j > 0.$
Vagyis a $D_x = diag(d_k)$, ahol $d_i = 1$, $d_j = \epsilon$ ha $i \neq j$ megfelelő.

3. $\Rightarrow$ 4. : A következtetés semmitmondó.

4. $\Rightarrow$ 5. : Legyen $\emptyset \neq I \subseteq \{i, \ldots, n\}$ indexhalmaz, illetve $\lambda$ és $\mathbf{x}_I$ az $M_{II}$ mátrix sajátértéke a hozzá tartozó sajátvektorral. Egészítsük ki az $\mathbf{x}_I$ vektort nullákkal $n$ dimenzióssá. A feltétel alapján ekkor van olyan nemnegatív átlójú diagonális $H$ mátrix, melyre $\mathbf{x}^T HM\mathbf{x} > \mathbf{0}$. De ekkor
$\mathbf{0} < \mathbf{x}_I^T H_I M_{II} \mathbf{x}_I = \lambda \mathbf{x}_I^T H_I \mathbf{x}_I = \lambda \mathbf{x}^T H \mathbf{x}$. (10)
A $H$ mátrix definíciója miatt $\mathbf{x}^T H\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, így (10) csak úgy teljesülhet, ha $\lambda > 0$.

5. $\Rightarrow$ 1. : Mivel az $M$ mátrix valós, így a komplex sajátértékek a konjugált párjukkal együtt szerepelnek. Egy nem nulla komplex szám és konjugáltjának a szorzata mindig pozitív. Mivel egy mátrix determinánsa a sajátértékeinek a szorzata, az állítás következik.

Megemlítjük, hogy a 2. $\Rightarrow$ 5. közvetlen is könnyen bizonyítható: Legyen ugyanis $\lambda$ az $M$ egy valós sajátértéke az $\mathbf{x}$ sajátvektorral. Mivel $\lambda$ valós, így az $\mathbf{x}$ is. A feltétel szerint van olyan $i$ index, melyre $\mathbf{x}_i(M\mathbf{x})_i = \lambda \mathbf{x}_i^2 > 0$, amiből $\lambda > 0$ következik. ■

A következő részben a $\mathcal{P}$ mátrixosztály egy általánosított osztályát, a $\mathcal{P}_0$ mátrixosztályt vizsgáljuk. Fontos tulajdonsága, hogy Fiedler és Ptak ezen mátrix osztályt úgy definiálták, mint a pozitív szemidefinit mátrixok általánosítása.

**2.1.2. Definíció.** *Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix a pozitív szemidefinit mátrixok (PSD) osztályához tartozik, ha $\boldsymbol{x}^T M\boldsymbol{x} \geq 0$ minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén. Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix a pozitív definit mátrixok (PD) osztályához tartozik, ha $\boldsymbol{x}^T M\boldsymbol{x} > 0$ minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ vektor esetén.*

Ezen definíció a lineáris algebrabeli definíciótól csak a szimmetriában tér el.

**2.1.3. Definíció.** *Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot $\mathcal{P}_0$ mátrixnak nevezzünk, ha minden főminorja nemnegatív.*

**2.1.2. Példa.** $A = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ -31 & 74 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

A következő lemmában összegyűjtöttük a $\mathcal{P}_0$ mátrixok fontos tulajdonságait, melyek bizonyíthatóak.

**2.1.2. Lemma.** *Egy adott $M$ mátrix következő tulajdonságai ekvivalensek:*

1. $M \in \mathcal{P}_0$
2. *Minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ vektor esetén létezik egy $i$ index, melyre $\boldsymbol{x}_i \neq 0$ és $\boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i \geq 0$.*
3. *Minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ vektor esetén létezik egy $H_x$ nemnegatív diagonális mátrix, melyre $\boldsymbol{x}^T H_x \boldsymbol{x} > 0$ és $\boldsymbol{x}^T H_x M \boldsymbol{x} \geq 0$.*
4. *Minden valós sajátértéke $M$-nek, valamint a diagonális részmátrixnak nemnegatív.*
5. $\det(I - \Lambda + \Lambda M) \geq 0$ *minden $\Lambda$ diagonális mátrixra, melyre* $(0 \leq \Lambda \leq I)$.
6. $I - \Lambda + \Lambda M \in \mathcal{P}_0$ *minden $\Lambda$ diagonális mátrixra, melyre* $(0 \leq \Lambda \leq I)$.
7. $M + \epsilon I \in \mathcal{P}$ *minden $\epsilon > 0$ esetén.*
8. $\begin{pmatrix} Y & X \\ -M & I \end{pmatrix}$ *nemszinguláris mátrix bármely pozitív diagonális $Y$ és $X$ mátrixok esetén.*

*Bizonyítás.* (1, 2, 4, 7 állítás)

1. $\Rightarrow$ 7. : Tetszőleges $D$ diagonális mátrix esetén
$\det(M + D) = \sum\limits_{\alpha} \det D_{\alpha\alpha} \det(M_{\overline{\alpha\alpha}})$,
ahol a szumma az $\{1, \ldots, n\}$ összes részhalmazára vonatkozik. Mivel az $M$ mátrix $\mathcal{P}_0$, így az összeg összes tagja nemnegatív. De az $\alpha = \{1, \ldots, n\}$ választás esetén a megfelelő összeadandó értéke $\epsilon^n$. Emiatt $\det(M + \epsilon I) > 0$. Mivel egy $\mathcal{P}_0$ mátrix teteszőleges diagonális menti részmátrixa is nyilvánvalóan $\mathcal{P}_0$ mátrix, így az állítás következik.

7. $\Rightarrow$ 2. : Legyen $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ adott. Mivel $M + \epsilon I$ tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén $\mathcal{P}$ mátrix, így az előző lemma alapján van olyan $i$ index melyre $\mathbf{z}_i((M + \epsilon I)\mathbf{z})_i > 0$. Legyen $\{\epsilon_k\}$ egy szigorúan felülről nullához tartozó sorozat. Van olyan $j$ index, melyre végtelen sok $\epsilon_k$ esetén $\mathbf{z}_j((M + \epsilon I)\mathbf{z})_j > 0$. Ha $k \to \infty$ akkor $\epsilon_k \to 0$, és $\mathbf{z}_j(M\mathbf{z})_j \geq 0$.

2. $\Rightarrow$ 4., 4. $\Rightarrow$ 1. : Analóg módon bizonyítható a $\mathcal{P}$ mátrixokra vonatkozó tételhez. ∎

## 2.2. $\mathcal{P}_*(\kappa)$ és $\mathcal{P}_*$ mátrixok

A $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrixokat 1991-ben Kojima [9] definiálta, mint a pozitív szemidefinit mátrixok általánosításai. Ez egy kiemelkedő eredmény, hiszen ez a legbővebb olyan mátrix osztály, amelyben a belső pontos algoritmusok polinomálisak, habár a komplexitás függ a $\kappa$ paraméter értékétől.

**2.2.1. Definíció.** *Legyen $\kappa > 0$ egy nemnegatív szám. Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrixnak hívunk, ha*

$$(1+4\kappa)\sum_{i\in I_+(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i + \sum_{i\in I_-(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i \geq 0$$

*minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén, ahol*

$$I_+(\boldsymbol{x}) = \{1 \leq i \leq n : \boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i > 0\}$$

*és*

$$I_-(\boldsymbol{x}) = \{1 \leq i \leq n : \boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i < 0\}$$

Nevezzük el a $\kappa$ számot súlynak, melynek nemnegativitása fontos feltétel, így látható, hogy a pozitív tag azaz a skaláris szorzat minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén nemnegatív. Megfigyelhető, hogy $\kappa = 0$ esetén pont a pozitív szemidefinit mátrix osztályt kapjuk.

Szükségünk van azon definíció alapján könnyen belátható, ugyanakkor a továbbiakhoz elengedhetetlen megállapítására, mely szerint, amennyiben $\kappa_1 \leq \kappa_2$ adott súlyok, akkor $\mathcal{P}_*(\kappa_1) \subseteq \mathcal{P}_*(\kappa_2)$

Ezért létezik egy olyan legkisebb $\kappa$ szám, melyre az $M$ mátrix $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrix osztálybeli. Jelölje ezt a számot $\hat{\kappa}(M)$, melynek neve az $M$ mátrix szükséges kappája. Mely elnevezés a $\hat{\kappa}(M)$ definíciójából adódik.

$$\hat{\kappa}(M) \geq \kappa_M(\mathbf{x}) := -\frac{1}{4}\frac{\mathbf{x}^T M\mathbf{x}}{\sum\limits_{i\in I_+(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i(M\mathbf{x})_i}$$

Ez egy alsó korlátja a bevezetett $M$ mátrix szükséges kappájának, amely egyértelműen következik a $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrixok definíciójából bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén, melyre $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} < 0$. Így $\hat{\kappa}(M)$-nek következő értékei lehetségesek:

$$\hat{\kappa}(M) = \begin{cases} 0 & \textit{ha } M \in PSD \\ \frac{1}{4} sup\{\kappa_M(\mathbf{x}) : \mathbf{x}^T M\mathbf{x} < 0\} & \textit{különben} \end{cases}$$

Minden nemnegatív $\kappa$ paraméterre az előzőekben bemutatott $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrixok uniója adja meg a $\mathcal{P}_*$ mátrix osztályt.

**2.2.2. Definíció.** *Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot $\mathcal{P}_*$ mátrixnak nevezzük, ha ez egy $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrix valamely $\kappa \geq 0$ esetén, azaz $P_* = \bigcup\limits_{\kappa\geq 0} P_*(\kappa)$.*

## 2.3. Elégséges mátrixok

Ebben a részben részletesen megismerkedhetünk az elégséges mátrixok eddig meghatározott és vizsgált tulajdonságaival, melyek nagy segítséget nyújthatnak a matematikai programozás egyik legintenzívebben kutatott területén, a gyakorlatban sokszor alkalmazott lineáris komplementaritási feladatok megoldásában.

1989-ben Cottle, Pang és Venkateswaran [10] bevezette az elégséges mátrixok osztályát, amely a $\mathcal{P}$ és a $PSD$ mátrix osztályok általánosítása. Továbbá azt is megmutatták, hogy az elégséges mátrixok egy speciális struktúrája a $\mathcal{P}_0$ mátrix osztály.

**2.3.1. Definíció.** *Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot oszlop elégséges mátrixnak (Column Sufficient, CS) nevezünk, ha minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\boldsymbol{x}(M\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0}$ esetén $\boldsymbol{x}(M\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, és sor elégségesnek (Row Sufficient, RS) nevezünk, ha $M^T$ oszlop elégséges.*
*Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix elégséges, ha oszlop és sor elégséges is.*

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix átrendezésén a $P^TMP$ mátrixot értjük, ahol $P$ egy permutációmátrix.

**2.3.1. Lemma.** *Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sor (oszlop) elégséges mátrix tetszőleges átrendezése is sor (oszlop) elégséges.*

*Bizonyítás.* Legyen $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges permutációmátrix. Figyeljük meg, hogy tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén a Hadamard szorzást alkalmazva
$P^T(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (P^T\mathbf{x}) \cdot (P^T\mathbf{y})$.
Felhasználva hogy $P^TP = I_n$ könnyen látható, hogy
$P^T(\mathbf{x} \cdot (M\mathbf{x})) = (P^T\mathbf{x}) \cdot ((P^TMP)(P^T\mathbf{x}))$.
Az $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x}$, vagyis $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ helyettesítéssel élve:

$$P^T((P\mathbf{y}) \cdot (M(P\mathbf{y}))) = (\mathbf{y}) \cdot ((P^TMP)(\mathbf{y})). \tag{2.1}$$

Vagyis ha létezne $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ $P^TMP$, mely sértené az elégségességét, akkor $P\mathbf{y}$ sértené az $M$ elégségességét, mivel az (2.1) bal oldalán a $P^T$ mátrixszal való szorzás csak az elemek sorrendjét változtatja meg, az egyes előjelek számát nem. ∎

A következő esetben is megőrződik a sor (oszlop) elégséges tulajdonság.

**2.3.2. Lemma.** *Ha $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sor (oszlop) elégséges mátrix, $D$ alkalmas méretű diagonális mátrix, akkor $DMD$ is sor (oszlop) elégséges.*

*Bizonyítás.* Az állítás következik a sor (oszlop) elégséges mátrixok definíciójából, és abból hogy tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén
$\mathbf{x} \cdot ((DMD)\mathbf{x}) = (D\mathbf{x}) \cdot (M(D\mathbf{x}))$,
mivel
$[\mathbf{x} \cdot ((DMD)\mathbf{x})]_i = \mathbf{x}_i(DMD\mathbf{x})_i = \mathbf{x}_i(\delta_i \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\delta_j\mathbf{x}_j) = (\delta_i\mathbf{x}_i) \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(\delta_j\mathbf{x}_j) = [(D\mathbf{x}) \cdot (M(D\mathbf{x}))]_i$. ∎

A következő lemmában a diagonális menti négyzetes részmátrixok elégségességét vizsgáljuk.

**2.3.3. Lemma.** *Legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sor (oszlop) elégséges mátrix. Ekkor $M$ tetszőleges diagonális menti négyzetes részmátrixa is sor (oszlop) elégséges.*

*Bizonyítás.* Legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sor elégséges, és tekintsük egy tetszőleges $M_{\alpha\alpha}$ részmátrixát. Legyen most $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{|\alpha|}$ olyan, hogy $\mathbf{y} \cdot (M_{\alpha\alpha}^T \mathbf{y}) \leq 0$. Definiáljuk az $\mathbf{x}$ vektort olymódon, hogy $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{y}$, $\mathbf{x}_{\overline{\alpha}} = 0$. Ekkor $\mathbf{x} \cdot (M^T \mathbf{x}) \leq 0$, de mivel $M^T$ sor elégséges, így $\mathbf{x} \cdot (M^T \mathbf{x}) = 0$, azonban $(\mathbf{x} \cdot (M^T \mathbf{x}))_\alpha = \mathbf{y} \cdot (M_{\alpha\alpha}^T \mathbf{y})$, ami bizonyítja állításunkat. Az oszlop elégséges eset hasonlóan bizonyítható. ∎

Minden $\mathcal{P}_*$ mátrix elégséges, mivel először Kojima [9] a mátrix oszlop elégségességét bizonyította, majd Guu és Cottle [11] azt is belátták, hogy ezen mátrixok sor elégségesek is. Az ellenkező irányú állítást Väliaho [12] igazolta, így a $\mathcal{P}_*$ mátrix osztály megegyezik az elégséges mátrixok osztályával.

A következő lemmában összegyűjtöttük az elégséges mátrixok eddig ismert különböző tulajdonságait:

**2.3.4. Lemma.**

1. *Egy $M$ mátrix akkor, és csak akkor elégséges, ha*
   (a) *$M$ minden fő $(2 \times 2)$-es részmátrixa és mindegyik diagonálisbeli elemen való pivot transzformáltja elégséges.*
   (b) *$M$ minden diagonálisbeli elemen való pivot transzformáltja, azaz $\overline{M}$ esetén: $\overline{m}_{ii} \geq 0$ minden $i$-re, továbbá, ha $\overline{m}_{ii} = 0$ és $[\overline{m}_{ij} = 0$ vagy $\overline{m}_{ji} = 0]$, akkor $\overline{m}_{ji} = 0$ és $\overline{m}_{ij} = 0$.*
   (c) *$I - \Lambda + \Lambda M$ elégséges minden $\Lambda$ diagonális mátrixra, melyre $0 \leq \Lambda \leq I$.*
   (d) *$M$ minden $(r+1)$-edrendű diagonális részmátrixa elégséges, ahol $r < n$ az $M$ mátrix rangja.*
2. *Ha $M$ egy elégséges mátrix, akkor*
   (a) *ha $m_{ii} = 0$, akkor $m_{ij} = m_{ji} = 0$ vagy $m_{ij} \cdot m_{ji} < 0$ minden $j \neq i$ esetén.*
   (b) *a sorok $j \in J \subseteq I$ lineárisan függetlenek akkor és csak akkor, ha az oszlopok $j \in J$ lineárisan függetlenek.*
3. *Egy $M$ mátrix elégséges, ha (az egyik a következő két állítás közül teljesül):*
   (a) *minden $(n-1)$-edrendű diagonális részmátrixa elégséges és $\det M > 0$.*
   (b) *$M$ minden $r$-edrendű diagonális részmátrixa $\mathcal{P}$ mátrix, ahol $r < n$ az $M$ mátrix rangja.*
4. *Ha az $r < n$ rangú $M$ mátrix olyan, hogy minden $r$-edrendű diagonális részmátrixa elégséges, akkor $M$ akkor és csak akkor elégséges, ha minden $J \subseteq I$, melyre $|J| = r$ esetén $\det M_{JJ} = 0$, akkor a sorok és az oszlopok $j \in J$ lineárisan összefüggőek.*

5. $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_*$. *Itt* $\mathcal{P}_1$ *jelöli azon mátrixokat, melyek főminorjai mind pozitívak, kivéve egyet, amelyik* 0.

*Bizonyítás.* (1/d állítás)

A szükségesség nyilvánvaló. (Ha van olyan vektor, mely sérti a definíciót, az nullákkal kiegészítve jó az eredeti mátrixhoz is.) Az elégségességet az oszlop elégséges esetre bizonyítjuk, a sor elégséges eset hasonlóan bizonyítható. Az (1/a) állítást alkalmazzuk. Legyen $B$ az $M$ mátrix egy diagonális menti blokk pivot transzponáltja mely egy $\alpha \subset \{1,\ldots,n\}$ indexhalmazhoz tartozik. Mivel ekkor szükséges, hogy $M_{\alpha\alpha}$ nem szinguláris, így $|\alpha| \leq r$. Legyen továbbá $S \subset \{1,\ldots,n\}$, $|S| = 2$. Azt kell megmutatnunk, hogy $B_{SS}$ oszlop elégséges. Két esetet különböztetünk meg.
1. Ha $|R \bigcup S| \leq r+1$, akkor $M_{R\bigcup S, R\bigcup S}$ oszlop elégséges, így az előzőek alapján speciálisan a $B_{SS}$ is oszlop elégséges.
2. Ha $|R| = r$, $R \bigcup S = \emptyset$. Ekkor a Schur formula [18] alapján
$rang(M) \geq rang(M_{\alpha\alpha}) + rang(B_{SS})$
$r \geq r + rang(B_{SS})$
és emiatt $B_{SS} = 0$. ■

*Bizonyítás.* (3/a állítás)

Az oszlop elégséges esetet bizonyítjuk, a sor elégséges eset analóg. Figyeljük meg, hogy $M \in \mathcal{P}_0$. Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre $\mathbf{x} \cdot (M\mathbf{x}) \lneqq 0$. Két esetet különböztetünk meg.
1. Ha $\mathbf{x}_k = 0$ valamely $k$ indexre. Ekkor
$\mathbf{x}_{\{1,\ldots,n\}-k} \cdot (M\mathbf{x})_{\{1,\ldots,n\}-k} \lneqq 0$
vagyis az $M_{\{1,\ldots,n\}-k,\{1,\ldots,n\}-k}$ mátrix nem elégséges, ami ellentmondás.
2. Ha $\mathbf{x}_i \neq 0$ bármely $i \in \{1,\ldots,n\}$ esetén. Általánosítás nélkül feltehetjük, hogy $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ illetve $M\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$. Legyen $\mathbf{z} = -M^{-1}\mathbf{e}$, ahol $\mathbf{e} = (1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$ és legyen $\epsilon > 0$ olyan pici, hogy $\mathbf{x} := \mathbf{x} + \epsilon\mathbf{z} > 0$. Ekkor $M\mathbf{x} = \mathbf{y} - \epsilon\mathbf{e} < \mathbf{0}$ vagyis $\mathbf{x} \cdot (M\mathbf{x}) < \mathbf{0}$, ami ellentmondás. ■

Megfigyelhető, hogy ha az $M$ mátrix szükséges kappája nem véges, azaz vagy $\kappa(x)$ nem definiálható egy $x$ pontban (mert az $I_+(x)$ halmaz üres), vagy a $\kappa(x_k)$ végtelenbe tart egy $\{x_k\}$ sorozat esetén, akkor az adott $M$ mátrix nem elégséges.

Ezért a következőkben megvizsgáljuk egy mátrix szükséges kappájának tulajdonságait:

1. Ha $M \in \mathcal{P} \backslash PD$, akkor létezik egy $\tilde{\mathbf{x}} \neq 0$, melyre $\hat{\kappa}(M) = \kappa_M(\tilde{\mathbf{x}})$, ugyanis $\hat{\kappa}(M) = max\{\kappa_M(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$. Ha $M \notin \mathcal{P}$, akkor ez nem igaz még 2 dimenzióban sem.

2. $\hat{\kappa}(DMD) = \hat{\kappa}(M)$ bármely $D$ diagonális mátrixra, amelynek elemei nemnullák, és mérete megegyezik az $M$ mátrix méretével.

3. $\hat{\kappa}(B) = \hat{\kappa}(A)$, ha $B$ egy diagonálisbeli elemen való pivot transzformáltja $A$-nak.

4. $\hat{\kappa}(M) \geq \hat{\kappa}(\overline{M})$, $M$ minden $\overline{M}$ diagonális részmátrixára.

5. Ha $M = diag(M_1, M_2)$, akkor $\hat{\kappa}(M) = max\{\hat{\kappa}(M_1), \hat{\kappa}(M_2)\}$.

6. Ha $M \in \mathcal{P}_*$ és $D$ egy nemnegatív diagonális mátrix, amely mérete megegyezik $M$ méretével, akkor $\hat{\kappa}(M + D) \leq \hat{\kappa}(M)$.

7. Ha $M \in \mathcal{P}_*$ és $D$ egy nemnegatív diagonális mátrix, amely mérete megegyezik $M$ méretével, akkor
$\hat{\kappa}(\begin{pmatrix} M & I \\ -I & D \end{pmatrix}) = \hat{\kappa}(M)$. Következésképp, nemnegatív $d \geq 0$ skalárok esetén
$\hat{\kappa}(\begin{pmatrix} M & -\mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_1^T & d \end{pmatrix}) = \hat{\kappa}(M)$, ahol $\mathbf{e}_1$ az első egységvektor.

8. Legyen $M \in \mathcal{P}_*$, melyre $m_{ij} = 0$, ha $1 \leq i, j \leq n - 1$. Ekkor
$1 + 4\hat{\kappa}(M) = \frac{\max\limits_i |m_{ni}/m_{in}|}{\min\limits_i |m_{ni}/m_{in}|}$.

9. Legyen $M \in \mathcal{P}_*$ és $m_{jk} = m_{jh}$, $m_{kj} = m_{hj}$, minden $j \neq k$ esetén, és $m_{kk} \geq m_{hh}$. Ekkor $\hat{\kappa}(M_{JJ}) = \hat{\kappa}(M)$, ahol $J = I \backslash \{k\}$.

10. Ha $A \in \mathcal{P}_* \backslash \mathcal{P}$, akkor $\hat{\kappa}(A) = max\{\hat{\kappa}(B_{JJ})$ : $B$ egy diagonálisbeli elemen való pivot transzformáltja $A$-nak és $J = I \backslash \{i\}$ bármely $i$-re $\}$.

11. Egy elégséges mátrix szükséges kappája megegyezik transzponáltjának szükséges kappájával, azaz, ha $M \in \mathcal{P}_*$, akkor $\hat{\kappa}(M^T) = \hat{\kappa}(M)$.

12. Egy feltevés, hogy $\hat{\kappa}(M)$ egy folytonos függvény $M \in \mathcal{P}_*$ esetén. Ez csak $2 \times 2$-es mátrixok esetén bizonyított és $\mathcal{P}$ mátrixok esetén.

Sajnos nem létezik olyan polinomiális algoritmus, amely eldönti egy tetszőleges mátrixról, hogy elégséges-e, csupán Väliaho által kifejlesztett két teszt (egyik egy $M$ mátrix elégségességéről dönt, a másik pedig meghatározza egy elégséges mátrix szükséges kappáját), melyek exponenciálisak. Tehát általános esetben mindkét kérdés nehéz, azonban Väliaho a $(2 \times 2)$-es $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixokra készített egy olyan osztályozást, ami segít nekünk az eldöntési problémában.

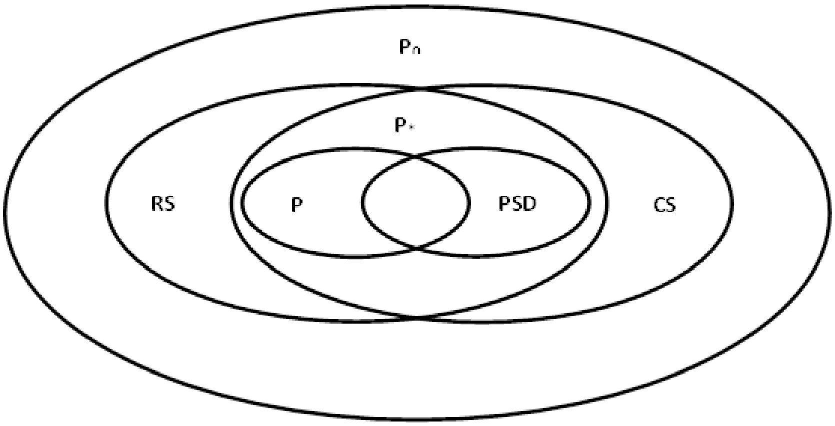
$M \in PSD \Leftrightarrow a \geq 0,\, d \geq 0,\, (b + c)^2 \leq 4ad$
$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow a > 0,\, d > 0,\, ad - bc > 0$
$M \in \mathcal{P}_* \Leftrightarrow (a \geq 0, d \geq 0, (ad - bc > 0 \vee (ad - bc = 0 \wedge ((a = 0 \vee d = 0) \Rightarrow b = 0, c = 0))))$

Továbbá ezen mátrixok szükséges kappája Väliaho szerint a következő:

**2.3.1. Tétel.** $M \in PSD \Rightarrow \hat{\kappa} = 0$ *(definíció szerint)*
$M \in \mathcal{P}_* \backslash PSD \Rightarrow 1 + 4\hat{\kappa} = \frac{max\{b^2, c^2\}}{(\sqrt{ad} + \sqrt{ad - bc})^2}$
$M \in \mathcal{P}_* \backslash (\mathcal{P} \cup PSD) \Rightarrow 1 + 4\hat{\kappa} = max\{|\frac{b}{c}|, |\frac{c}{b}|\}$.

## 2.4. A $PSD$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_*$ és a $\mathcal{P}_0$ mátrixosztályok szimmetriája

A következő ábrával szemléltetjük az eddig vizsgált különböző mátrixosztályok egymáshoz viszonyított elhelyezkedését.




2.1. ábra. A mátrix osztályok

Könnyen látható tehát, hogy a következő relációk állnak fent:
$PSD \subsetneq \mathcal{P}_* \subsetneq \mathcal{P}_0$, $PSD \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{P}_*$, $\mathcal{P}_*(0) \equiv PSD$.

**2.4.1. Példa.**

1. *A* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *mátrix oszlop elégséges, de nem sor elégséges.*
2. *A* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *mátrix sor elégséges, de nem oszlop elégséges.*

**2.4.1. Megjegyzés.** *Észrevehető, hogy, ha egy mátrix eleme bármely fent említett mátrix osztálynak, akkor az azzal a jó tulajdonsággal rendelkezik, hogy bármely diagonális részmátrixa és bármely diagonálisbeli elemen való pivot transzformáltja ugyancsak ezen osztályhoz tartozik.*

**2.4.1. Tétel.** *A $PSD$ halmaz konvex kúp. A $\mathcal{P}, \mathcal{P}_*$ és $\mathcal{P}_0$ halmazok mindegyike kúp, de egyikük sem konvex. A $\mathcal{P}$ halmaz nyílt, míg a $PSD$ és $\mathcal{P}_0$ halmazok zártak.*

*Bizonyítás.* Az $PSD$ mátrixokról szóló állítás a definíció közvetlen következménye. Hasonlóan nyilvánvaló, hogy mindegyik fenti mátrixosztály kúpot alkot. Tekintsük az $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot és ennek transzponáltját a $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot. Mindkét mátrix $\mathcal{P}$ mátrix, így egyben $\mathcal{P}_*$ és $\mathcal{P}_0$ is, de az összegük $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ még csak nem is $\mathcal{P}_0$ mátrix. Mivel egy mátrix determinánsa folytonosan függ a mátrix elemeitől, a $\mathcal{P}$ mátrixok kúpja nyílt, a $\mathcal{P}_0$ mátrixok kúpja pedig zárt, mivel a két esetben a diagonális menti részmátrixok determinánsaitól $> 0$, illetve $\geq 0$ feltételt követelünk. Hasonlóan, a definícióból következik a $PSD$ mátrixok kúpjának zártsága is. ■

**2.4.2. Tétel.** *A $\mathcal{P}_*$ mátrixok kúpja sem nem zárt, sem nem nyílt.*

*Bizonyítás.* Tekintsük az $M_k := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{k} & 0 \end{pmatrix}$ mátrixokat. Ezen mátrixokra $M_k \in SS \subset \mathcal{P}_*(0)$, és minden $k > 1$ esetén elégséges, de se nem $\mathcal{P}_*(0)$, se nem $\mathcal{P}$ (lévén $\mathbf{x} = (1,1)$ esetén $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = \frac{1}{k} - 1$). Emiatt $\hat{\kappa}(M_k) = \frac{(k-1)}{4}$. Mivel az $M_\infty = \lim_{k\to\infty} M_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix nem $\mathcal{P}_*$, így a $\mathcal{P}_*$ mátrixok osztálya nem zárt. Tekintsük az $M := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_* \backslash (\mathcal{P} \cup \mathcal{P}_*(0))$ mátrixot. Ezen mátrixra $\hat{\kappa}(M) = \frac{3}{4}$. De az $M_\epsilon := \begin{pmatrix} 2 & 4+\epsilon \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ nem $\mathcal{P}_*$, sőt még csak nem is $\mathcal{P}_0$ semmilyen $\epsilon > 0$ esetén, így a $\mathcal{P}_*$ mátrixok osztályának komplementere sem zárt. ■

## 2.5. Komplexitás

Ahogy az előbbiekben említettük, ezidáig csak egy exponenciális idejű rekurzív algoritmus ismert, egy tetszőleges mátrix elégségességének eldöntésére, amely Väliaho nevéhez fűződik. Ennek műveletigénye $\frac{1}{3}2^{n-3}n(n-1)(n+10)$. Így ebben a részben összegyűjtöttünk néhány komplexitással kapcsolatos eredményt.

**2.5.1. Tétel.** *Adott egy valós négyzetes $M$ mátrix. Ekkor az eldöntési probléma, $M$ $\mathcal{P}$ mátrix-e, $co-\mathbb{NP}$ teljes.*

**2.5.2. Tétel.** *Adott egy egész négyzetes $M$ mátrix. Ekkor az eldöntési probléma a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{P}_0$ mátrixok osztályára, illetve az elégséges mátrixokra $co-\mathbb{NP}$ teljes.*

# 3. fejezet

# Väliaho teszt elégséges mátrixokra

Ezen fejezet keretei között megvizsgáljuk, feldolgozzuk Väliaho három cikkének szisztematikusan felépített, minden fontos eredményt összefoglaló tanulmányait. Többek között kitérünk szakdolgozatom címét adó, elégséges mátrixok kritériumaira, az ezen témakörben összegyűjtött fontos tulajdonságokra, megoldást segítő feltételekre, algoritmusokra, majd részletesen kitérünk ezen mátrixosztály szükséges kappájának meghatározására.

Az utóbbi időben a gyakorlati alkalmazásokban is sokszor felmerülő lineáris komplementaritási feladattal (LCP) kapcsolatban emelkedtek ki az oszlop elégséges, sor elégséges, illetve elégséges mátrixok.

**3.0.1. Definíció.** *Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot oszlop elégséges, ha bármely $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén $\boldsymbol{x}_i(A\boldsymbol{x})_i \leq 0, i = 1, \ldots, n \Rightarrow \boldsymbol{x}_i(A\boldsymbol{x})_i = 0, i = 1, \ldots, n$ és sor elégséges, ha $A^T$ oszlop elégséges. Az $A$ mátrix elégséges, ha egyben oszlop és sor elégséges is.*

Az LCP elméletben ezen mátrixosztálynak lényeges szerepe van, mégpedig egy mátrix sor elégségessége a megoldások létezésével, míg oszlop elégségessége a megoldás halmazzal áll kapcsolatban. Bármely olyan lineáris komplementaritási feladat, melynek együttható mátrixa elégséges, megoldható a diagonálisbeli elemen való pivotálási módszerrel és a criss-cross módszerrel is. Megvizsgáljuk és kiegészítjük az elégséges mátrixok alap elméletét, valamint kifejlesztünk egy kritériumot arra, hogy azonosítani tudjuk ezen tulajdonsággal rendelkező mátrixokat, majd az eddig létező kritériumokkal összehasonlítjuk. A fő matematikai eszközünk a diagonálisbeli elemen való pivotálás.
A következőkben megmutatjuk, hogy ha egy $A$ mátrix oszlop (sor) elégséges, rangja $r$, és valamely r oszlopa (sora) lineárisan független, akkor a megfelelő diagonális részmátrixa nemszinguláris. Ennek következtében, ha az $A$ mátrix valamely oszlopai (sorai) lineárisan függetlenek, akkor a megfelelő sorai (oszlopai) is azok.

**3.0.2. Definíció.** *Egy $A$ mátrixot (sor, oszlop) elégségesnek nevezünk $k$-ad rendben, ha az összes $(k \times k)$ -as diagonális részmátrixa (sor, oszlop) elégséges.*

Megmutatunk egy rekurzív összefüggést, ami szerint egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix $r < n$ -ed rendben (sor, oszlop) elégséges, ha $(r + 1)$-ed rendben is (sor, oszlop) elégséges.

A következőkben tekintsük azon eseteket, melyek feltételeinek teljesülése esetén következtethetünk az adott mátrix elégségességére. Például, ha egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak a determinánsa pozitív, $k < n$-ed rendben (sor, oszlop) elégséges, és inverze $(n-k)$-ad rendben (sor, oszlop) elégséges, akkor az adott mátrix is (sor, oszlop) elégséges.
Ezen felül megadunk szükséges és elégséges feltételeket egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n-1)$-ed rendben (sor, oszlop)elégséges mátrixra, hogy az mikor lesz (sor, oszlop) elégséges. Ez az eredmény elengedhetetlen ahhoz, hogy megalkossunk egy olyan gyakorlati tesztet, mely segít eldönteni, hogy az adott mátrix elégséges-e. Ez azonban egy rekurzív teszt, azaz ahhoz, hogy eldöntsük, egy mátrix (sor, oszlop) elégséges-e, ahhoz egymást követően $k = 2, 3, \ldots$ esetén ellenőrizzük, vajon $A$ (vagy $A^{-1}$), amely $(k-1)$-ed rendben (sor, oszlop) elégséges, az $k$-ad rendben is (sor, oszlop) elégséges-e.

## 3.1. Előkészítések

Ha $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ( $A$ egy valós $(m \times n)$-es mátrix), $A^T$ -tal jelöljük az $A$ mátrix transzponáltját. Ha $R \subset \{1, \ldots, m\}$ és $S \subset \{1, \ldots, n\}$ , az $A$ mátrix azon részmátrixát, melynek sorai $i \in R$ és oszlopai $j \in S$ , az $A_{RS}$ mátrixszal jelöljük, az $A$ sor részmátrixát, mely az $i \in R$ sorokat tartalmazza $A_R$-rel jelöljük és oszlop részmátrixát, mely a $j \in S$ oszlopokat tartalmazza $A_S$-sel jelöljük.
Ha az $A$ mátrix négyzetes, akkor $\det A$-val vagy $|A|$-kel jelöljük determinánsát, $adjA$-val pedig az adjungáltját, és $A^{[k]}$-val a $(k \times k)$-as diagonális részmátrixát.
Egy $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonális mátrixot, melynek diagonálisbeli elemei
$d_1, \ldots, d_n, D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ -nel jelöljük. Ez a konvenció kiterjeszthető blokk diagonális mátrixokra, ahol a $d_i$ diagonálisbeli eleme helyére a $D_i$ diagonális blokkokat helyettesítjük. Egy négyzetes mátrix diagonális permutációján az oszlopok és sorok egyidejű permutációját értjük. A $\mathscr{C}_{rs}$ jelölést a diagonális permutációra használjuk, mely megváltoztatja a sorokat és oszlopokat, $r$-t és $s$-t.
Bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra úgy tekintünk, mint egy $(n \times 1)$ -es mátrix és $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]^T$ jelöli vagy az egyszerűség kedvéért az $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$.
Továbbá $\mathbf{x}_R$ jelöli az $\mathbf{x}$ vektor részvektorát, melynek komponensei $i \in R$. Ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, ezek Hadamard szorzatán az $\mathbf{x} * \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektort értjük, melyet a következőképp definiálunk: $(\mathbf{x} * \mathbf{y})_i = \mathbf{x}_i\mathbf{y}_i, i = 1, \ldots, n$.
Definiáljuk az $N = \{1, \ldots, n\}$ halmazt, és jelölje az $R \subset N$ halmaz komplementerét $\bar{R}$. Használjuk a következő rövidítéseket: $R + s = R \cup \{s\}, R - r = R \backslash \{r\}$ és $R + s - r = R \cup \{s\} \backslash \{r\}$
Az $R$ halmaz számosságát $|R|$-rel, míg az üres halmazt $\emptyset$-vel jelöljük. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorok előjele megegyezik, ha $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$ vagy $\mathbf{xy} > 0$, és előjelük különböző, ha $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$ vagy $\mathbf{xy} < 0$.
Ha $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, $\lfloor \mathbf{x} \rfloor$-szel jelöljük a szám alsó egész részét. Továbbá a $:=$ szimbólum jelöli a definiálást.
A szimpla pivot műveletet, ahol a pivot elem $a_{rs}$, $\mathscr{P}_{rs}$-sel jelöljük, és azon szimpla diagonálisbeli elemen való pivot műveletet, ahol $a_{rr}$ a pivot elem, $\mathscr{P}_r$ -rel jelöljük.
Továbbá bevezetjük a $\mathscr{P}_{(rs)}$ blokk pivotálási műveletet, ahol a pivot elem $A_{rs}$ egy adott $A = [A_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ blokk mátrix esetén.

Jelölje $\mathscr{P}^*_{RS}$ a pivot kondenzációt, mely során a $\mathscr{P}_{RS}$ műveletet követően töröljük az $i \in R$ sort és $j \in S$ oszlopot.
Ezen művelet során megtartjuk a sorok és oszlopok eredeti számozását.
Továbbá bármely $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén [15] miatt a következő érvényes:

$$rank(A) = rank(A_{RR}) + rank(\mathscr{P}^*_R A), det(A_{RR}) \neq 0. \tag{3.1}$$

Legyen $A_{i*}$ az $A$ mátrix $i$-edik sora, és $A_{*j}$ az $A$ mátrix $j$-edik oszlopa számára fenntartott jelölés.
Legyen $\mathbf{e}_i$ az $i$-edik koordináta vektor. A vektorokra használjuk az euklideszi normát: $||.||$.

## 3.2. Elégséges mátrixok tulajdonságai

**3.2.1. Tétel.** *Legyen* $G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \hat{G} = \mathscr{P}_{(1)}G = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix}$, *ahol A nemszinguláris. Ekkor:*

1. $\hat{a}_{ij} = A_{ji} \div \det A$
2. $\hat{b}_{ij} = \det E_{ij} \div \det A$
3. $\hat{c}_{ij} = \det F_{ij} \div \det A$
4. $\hat{d}_{ij} = \begin{vmatrix} A & B_{*j} \\ C_{i*} & d_{ij} \end{vmatrix} \div \det A$ *ahol:*

*$A_{ji}$ kofaktora $a_{ji}$-nek $A$-ban*
*$E_{ij}$-t $A$-ból kapjuk, úgy, hogy az $i$ oszlopot helyettesítjük $-B_{*j}$-vel*
*$F_{ij}$-t $A$-ból kapjuk úgy, hogy a $j$ sort helyettesítjük $C_{i*}$-vel.*

*Bizonyítás.*

1. Triviális
2. Értelmezzük $\hat{B}_{*j} = -A^{-1}B_{*j}$-t úgy, mint az $Ax = -B_{*j}$ egyenlet megoldása, és használjuk a Cramer szabályt.
3. Értelmezzük $(\hat{C}_{i*})^T = (C_{i*}A^{-1})^T = (A^T)^{-1}C^T_{i*}$ -t úgy, mint az $A^T x = C^T_{i*}$ egyenlet megoldása, és használjuk a Cramer szabályt.
4. Megjegyezzük, hogy $\hat{d}_{ij} = d_{ij} - C_{i*}A^{-1}B_{*j}$ , és alkalmazzuk a Schur formulát [18] a blokk determinánsra.

■

Míg az elégséges mátrixok osztálya Cottle, Pang és Venkateswaran [10] nevéhez fűződik, addig a $\mathcal{P}_*(\kappa)$ osztályt Kojima, Megiddo, Noma és Yoshise [9] definiálták a következőképp:

**3.2.1. Definíció.** *Egy $\kappa \geq 0$ paraméter esetén a $\mathcal{P}_*(\kappa)$ osztály tartalmazza mindazon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokat, melyek kielégítik a következő egyenlőtlenséget:*

$$(1+4\kappa)\sum_{i\in I_+(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i + \sum_{i\in I_-(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i \geq 0$$

*$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén, ahol $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ és $I_+(\boldsymbol{x}) = \{i|\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i > 0\}$ és $I_-(\boldsymbol{x}) = \{i|\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i < 0\}$.*
*A $\mathcal{P}_*$ mátrixosztály ezen osztályok uniójával egyezik meg, azaz $\mathcal{P}_* = \bigcup_{\kappa\geq 0}\mathcal{P}_*(\kappa)$.*

Tudjuk, hogy a $\mathcal{P}_*$ mátrixok elégségesek. Azonban azt is megmutatjuk, hogy fordítva is teljesül az állítás, azaz minden elégséges mátrix $\mathcal{P}_*$-beli is. Gun és Cottle már megmutatták, hogy $(2\times 2)$-es mátrixok esetén ezen osztályok megegyeznek. Felhasználva az így kapott eredményeket belátható, hogy kettőnél nagyobb rangú mátrixok esetén is teljesül az egybeesés. Következésképp, minden, amit bebizonyítottunk a $\mathcal{P}_*$ osztályra, az teljesülni fog az elégséges mátrixok osztályára is, és minden eredmény az elégséges mátrixokról igaz lesz a $\mathcal{P}_*$ osztályra is.

A következőkben felsorolunk néhány fontos közös tulajdonságot a fent említett, definiált $\mathcal{P}_*(\kappa)$, $\mathcal{P}_*$ és elégséges mátrixosztályok esetén.

1. Mindhárom osztály $\mathcal{P}_0$-beli, melynek tagjai olyan mátrixok, melyek főminorjai nemnegatívak. (Tehát ezen osztályokba tartozó mátrixok nemnegatív diagonálisbeli elemekkel rendelkeznek.)

2. Mindhárom osztály tartalmazza a $PSD$ osztályt, azaz a pozitív szemidefinit mátrixok osztályát. A $\mathcal{P}_*$ és az elégséges mátrixosztály tartalmazza a $\mathcal{P}$ osztályt, azaz azon mátrixokat, melyek főminorjai pozitívak.

3. Ha egy $A$ mátrix eleme valamely mátrixosztálynak a három közül, akkor $A$ bármely diagonális permutációja, bármely diagonális részmátrixa és bármely diagonális transzformáltja is eleme valamelyiknek.

**3.2.1. Megjegyzés.** $\mathcal{P}_*(0) = PSD$.

**3.2.2. Tétel.** *Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix elégséges és $a_{kk} = 0$, akkor $a_{ik} = a_{ki} = 0$ vagy $a_{ik}a_{ki} < 0$ $\forall i \neq k$ esetén.*

**3.2.3. Tétel.** *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, P = diag(p_1,\ldots,p_n), Q = diag(q_1,\ldots,q_n)$, ahol $p_iq_i > 0$ $\forall i \in N$ esetén, és legyen $B = PAQ$. Ekkor:*

1. *Ha az $A$ mátrix elégséges, akkor $B$ is az.*

2. *Ha $A \in \mathcal{P}_*(\kappa)$ valamely $\kappa \geq 0$ esetén, akkor $B \in \mathcal{P}_*(\kappa')$ ahol $\kappa' \geq \kappa$ olyan, hogy*

$$\frac{1+4\kappa'}{1+4\kappa} = \frac{\max\limits_{i\in N}(p_i/q_i)}{\min\limits_{i\in N}(p_i/q_i)}$$

**3.2.4. Tétel.** *Az elégséges mátrixok osztálya részhalmaza a $\mathcal{P}_*$ mátrixosztálynak.*

*Bizonyítás.* Indukcióval bizonyítjuk $n$-re, azaz az adott mátrix méretére. Abban az esetben, mikor $n = 1$, az állítás triviális. Majd tegyük fel, hogy a tétel teljesül $(n-1)$ esetén is, és tekintsünk egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ elégséges mátrixot , melyre $n \geq 2$. Ha $A \in \mathcal{P}$, akkor ez egy $\mathcal{P}_*$ mátrix. Különben $A$-nak van egy olyan diagonális transzformáltja, melynek diagonálisbeli elemei nullák.
Így, általánosítás nélkül tegyük fel, hogy $a_{nn} = 0$. Megjegyezzük, hogy $a_{in} = a_{ni} = 0$ vagy $a_{in}a_{ni} < 0$ $\forall i \neq n$ esetén, 3.2.2. Tétel szerint.
A 3.2.3. Tétel miatt elegendő egy olyan $A$ mátrixot tekinteni, melynek alakja a következő:

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A} & \delta \\ -\delta^T & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

ahol $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{n-1})$, $\delta_i = 0$, vagy 1 bármely $i$ esetén. Meg kell mutatnunk, hogy bármely olyan elégséges mátrix, melynek alakja olyan , mint (3.2)-ben, rendelkezik véges szükséges kappával.
Ha $A \in PSD$, akkor $\hat{\kappa}(A) = 0$. Különben megmutatjuk, hogy $F(\mathbf{x})$ egyenletesen határolt egy $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x}^T A\psi\mathbf{x} < 0\}$ halmazbeli véges számmal.
Legyen $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ olyan, hogy $\mathbf{x}^{0T} A\mathbf{x}^0 = \hat{\mathbf{x}}^{0T}\hat{A}\hat{\mathbf{x}}^0 < 0$ , ahol $\hat{\mathbf{x}}^0 = (\mathbf{x}^0_1, \ldots, \mathbf{x}^0_{n-1})$.
Ki fog derülni, hogy azok az esetek, ahol $\mathbf{x}^0$ vagy $\mathbf{y}^0 = A\mathbf{x}^0$ vektoroknak van nulla komponense vagy $A$-nak van egy nulla oszlopa, azok majdnem teljesen le vannak fedve az indukciós feltevéssel.
Ha $\mathbf{x}^0_i\mathbf{y}^0_i \neq 0$ $\forall i \in N$ esetén és az $A$ mátrix összes oszlopa nemnulla, akkor szükségünk van több kidolgozott eljárásra.

Ha $\mathbf{x}^0_h = 0$ valamely $h \in N$ esetén, akkor $F(\mathbf{x}^0) \leq 4\hat{\kappa}(A_{N-h,N-h})$.
Ha $\mathbf{x}^0_i \neq 0$ $\forall i \in N$ esetén és a $h \in N$ oszlopa $A$-nak nulla, akkor az $A$ mátrix $h$ sora is nulla (lásd 3.2.2. Tétel), és $\mathbf{x}^0_h$ talán tart a nullához $F(\mathbf{x}^0)$ hatása nélkül, így megkaptuk az előző esetet.
A folytatásban feltesszük, hogy $\mathbf{x}^0_i \neq 0$ $\forall i \in N$ esetén, és $A$ összes oszlopa nemnulla.
Ekkor, 3.2.2. Tétel szerint, $A$ összes sora is nemnulla.

Ha $\mathbf{y}^0_h = 0$ valamely $h \in N$ esetén, akkor két esetet különböztetünk meg.
Először, ha $a_{hh} > 0$, akkor $F(\mathbf{x}^0) \leq 4\hat{\kappa}(B_{N-h,N-h})$, ahol $B = \mathscr{P}_h A$.
Másodszor, ha $a_{hh} = 0$, akkor $a_{hk}a_{kh} < 0$, valamely $k \in N$ esetén, lásd 3.2.2. Tétel.
Így $F(\mathbf{x}^0) \leq 4\hat{\kappa}(B_{N-h,N-h})$, ahol $B = \mathscr{P}_{\{h,k\}}A$.

Végül tegyük fel, hogy, $\mathbf{y}^0_i \neq 0$ $\forall i \in N$ esetén. Mivel $F(\lambda\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$ bármely $\lambda \neq 0$-ra, általánosítás nélkül feltehetjük, hogy $\mathbf{x}^0_n = 1$.
A következőkben, $\sum$ az $(N-n)$ halmaz feletti összegzést jelöli, $\sum_+$ az $(I_+(\mathbf{x}^0) - n)$ halmaz feletti összegzést, $\sum_-$ pedig az $(I_-(\mathbf{x}^0) - n)$ halmaz feletti összegzést.

Továbbá legyen $\gamma = 0$ vagy 1, aszerint, hogy $\mathbf{x}_n^0 \mathbf{y}_n^0 = \mathbf{y}_n^0 = -\sum \delta_i \mathbf{x}_i^0$ negatív vagy pozitív. Meghatározzuk $F(\mathbf{x})$ értékét az $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1^0, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}^0, t)$ pontban.

$$\bar{F}(t) = \frac{-\hat{\mathbf{x}}^{0T} \hat{A} \hat{\mathbf{x}}^0}{\sum_+ \hat{\mathbf{x}}_i^0 (\hat{\mathbf{y}}_i^0 + t\delta_i) - \gamma^t \sum \delta_i \mathbf{x}_i^0} \tag{3.3}$$

ahol $\hat{\mathbf{y}}^0 = \hat{A}\hat{\mathbf{x}}^0$. Ezen függvény, és deriváltja:

$$\bar{F}'(t) = \frac{(\hat{\mathbf{x}}^{0T} \hat{A} \hat{\mathbf{x}}^0)(\sum_+ \delta_i \mathbf{x}_i^0 - \gamma \sum \delta_i \mathbf{x}_i^0)}{[\sum_+ \hat{\mathbf{x}}_i^0 (\hat{\mathbf{y}}_i^0 + t\delta_i) - \gamma^t \sum \delta_i \mathbf{x}_i^0]^2} \tag{3.4}$$

az összes olyan $t$ értékre definiáltak, melyek esetén a (3.3)-beli nevező különbözik nullától. Négy esetet különböztetünk meg:

1. eset: $\gamma = 0, \sum_+ \delta_i \mathbf{x}_i^0 < 0$ . Ekkor $\delta_i = 1, \mathbf{x}_i^0 < 0, \mathbf{y}_i^0 < 0$, valamely $i \in I_+(\mathbf{x}^0) - n$ esetén.
   Megjegyezzük, hogy $\mathbf{y}_i(t) := \hat{\mathbf{y}}_i^0 + t$ előjelet vált az $(1, \infty)$ intervallumban.
   Növeljük $t$-t 1-től addig, míg először $\mathbf{y}_h(t)$ valamely $h \in N - n$ esetén nem lesz nulla $t_0$-ban.
   Minden $t \in [1, t_0]$ esetén, $\bar{F}(t)$ és $\bar{F}'(t)$ definiált, és $\bar{F}'(t) > 0$.
   Ezért $F(\mathbf{x}^0) < \bar{F}(t_0)$, és ezen eset visszavezethető arra az esetre, mikor $\mathbf{y}_h^0 = 0$.

2. eset: $\gamma = 0, \sum_+ \delta_i \mathbf{x}_i^0 \geq 0$. Csökkentjük $t$-t 1-től addig, míg először ez vagy $\mathbf{y}_h(t)$ valamely $h \in N - n$ esetén nem lesz nulla $t = t_0$-ban.
   Mindig teljesül, hogy $\bar{F}(t)$ és $\bar{F}'(t)$ definiált, és $\bar{F}'(t) \leq 0$.
   Így $F(\mathbf{x}^0) \leq \bar{F}(t_0)$, és ezen eset visszavezethető arra az esetre, mikor $\mathbf{x}_n^0 = 0$ , vagy arra az esetre, mikor $\mathbf{y}_h^0 = 0$, aszerint, hogy $t_0 = 0$ vagy $t_0 > 0$.

3. eset: $\gamma = 1, \sum_+ \delta_i \mathbf{x}_i^0 - \gamma \sum \delta_i \mathbf{x}_i^0 = -\sum_- \delta_i \mathbf{x}_i^0 < 0$.
   Ekkor $\delta_i = 1, \mathbf{x}_i^0 > 0, \mathbf{y}_i^0 < 0$ valamely $i \in I_-(\mathbf{x}^0) - n$ esetén.
   Ezt az esetet úgy folytatjuk, mint az 1. esetet.

4. eset: $\gamma = 1, \sum_+ \delta_i \mathbf{x}_i^0 - \gamma \sum \delta_i \mathbf{x}_i^0 = -\sum_- \delta_i \mathbf{x}_i^0 \geq 0$.
   Ezt az esetet úgy folytatjuk, mint a 2. esetet.

Összefoglalva a fenti fejtegetést, megmutattuk, hogy, ha a (3.2)-beli $A$ elégséges mátrix nem tartozik a $PSD$ mátrixok közé, akkor $\hat{\kappa}(A) \leq c$, ahol $c := \max\{\hat{\kappa}(B_{N-i,N-i}) | B$ az $A$ mátrix diagonális transzformáltja és $i \in N\}$, ami véges az indukciós feltevés szerint.

(Valójában $\hat{\kappa}(A) = 0$ kell, hogy legyen, mivel különben $\hat{\kappa}(B) = \hat{\kappa}(A) < \hat{\kappa}(B_{N-i,N-i})$ adódna valamely $B$ mátrixra, mely az $A$ mátrix diagonális transzformáltja valamely $i \in N$ esetén, ami lehetetlen.) ■

**3.2.2. Definíció.** *Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot $\mathcal{P}_0$ mátrixnak nevezünk, ha a főminorjai nemnegatívak, és $\mathcal{P}_1$ mátrixnak, ha a főminorjai pozitívak, kivéve egyet, ami nulla. Az összes $\mathcal{P}_0$ mátrix alkotja a $\mathcal{P}_0$ mátrixosztályt.*

**3.2.3. Definíció.** *Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot $\mathcal{P}$ mátrixnak nevezzünk, ha a főminorjai pozitívak. Az összes $\mathcal{P}$ mátrix alkotja a $\mathcal{P}$ mátrixosztályt.*

**3.2.5. Tétel.** *Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix $\mathcal{P}_0$ mátrix ($\mathcal{P}$ mátrix) akkor és csak akkor, ha minden nemnulla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén létezik egy $k$ index, amelyre $\boldsymbol{x}_k \neq 0$ és $\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{y}_k \geq 0$ $(> 0)$ , ahol $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$.*

Továbbiakban a legtöbb eredmény oszlop elégséges esetét fogjuk csak igazolni, a sor elégséges eset analóg módon bizonyítható.

**3.2.6. Tétel.** *Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix (sor, oszlop) elégséges, akkor:*

1. *A bármely diagonális permutációja*
2. *A bármely diagonális részmátrixa*
3. *A bármely diagonális transzformáltja*
   *is (sor, oszlop) elégséges.*

**3.2.1. Lemma.** *Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix (sor, oszlop) elégséges $k$-ad rendben és $B = \mathscr{P}_R A$ , ahol $R \subset N, |R| = h < k$, akkor $B$ (sor, oszlop) elégséges $(k-h)$-ad rendben.*

*Bizonyítás.* (Az oszlop elégséges eset)
Tekintsük $B$ bármely $B_{SS}$ részmátrixát, ahol $S \subset N, |S| \leq k-h$. Azért, mert $|R \cup S| \leq k$, $A_{R\cup S, R\cup S}$ oszlop elégséges, és $B_{R\cup S,R\cup S}$ és $B_{SS}$ is azok. ■

**3.2.7. Tétel.** *Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix (sor, oszlop) elégséges, akkor $A \in \mathcal{P}_0$*

**3.2.8. Tétel.** *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, melyre $a_{kk} = 0$. Ekkor:*

1. *Ha A oszlop elégséges, akkor $a_{ik} = 0$ vagy $a_{ik}a_{ki} < 0$ $\forall i \neq k$ esetén.*
2. *Ha A sor elégséges, akkor $a_{ki} = 0$ vagy $a_{ik}a_{ki} < 0$ $\forall i \neq k$ esetén.*
3. *Ha A elégséges, akkor $a_{ik} = a_{ki} = 0$ vagy $a_{ik}a_{ki} < 0$ $\forall i \neq k$ esetén.*

**3.2.9. Tétel.** *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, melynek rangja $r < n$, és oszlop (sor) elégséges, továbbá legyen $R \subset N, |R| = r$, az oszlopok (sorok) $i \in R$ lineárisan függetlenek. Ekkor $A_{RR}$ nemszinguláris.*

*Bizonyítás.* (Az oszlop elégséges eset)
Indukció $r$ szerint.
Ha $r = 0$, akkor nincs mit bizonyítani. Majd feltesszük, hogy a tétel igaz minden $< r$ rangú mátrixra, és legyen $A$ egy $r \geq 1$ rangú mátrix.
Legyen $R$, ahogy a tételben állítottuk, és feltesszük, általánosítás nélkül, hogy $R = 1, \ldots, r$.
Feltesszük ellenkezőleg, $rank(A_{RR}) = k < r$.
Legyen $S \subset R, |S| = k, A_{RR}$, oszlopai $j \in S$ lineárisan függetlenek. Ekkor az indukciós feltevés miatt $A_{SS}$ nemszinguláris. $B = \mathscr{P}^*_S A$, $B = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ ahol a nulla blokk $(r-k)$ rangú, és $rank(B_{21}) = r - k$. A 3.2.8. Tétel-ből következik, hogy $B_{12} \neq 0$. Így $rank(A) = k + rank(B) \geq k + rank(B_{21}) + rank(B_{12}) > r$ ellentmondás. ■

**3.2.10. Tétel.** *Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oszlop (sor) elégséges, és az $A$ oszlopai (sorai) $i \in S$ lineárisan függetlenek, akkor az $A$ sorai (oszlopai) $i \in S$ is lineárisan függetlenek.*
*Ha $A$ elégséges, akkor a sorai $i \in S$ lineárisan függetlenek, akkor és csak akkor, ha oszlopai $i \in S$ is.*

*Bizonyítás.* (Az oszlop elégséges eset)
Legyen $A$ egy $r$ rangú mátrix, és legyen $R$ olyan, hogy $S \subset R \subset N, |R| = r$, az $A$ mátrix $i \in R$ oszlopai lineárisan függetlenek. Ekkor $A_{RR}$ nemszinguláris. Ezért az $i \in R$ sorai $A$-nak lineárisan függetlenek, és ez igaz $A$ $i \in S$ soraira is. ■

**3.2.11. Tétel.** *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy oszlop elégséges mátrix, és legyenek a $j \in S$ oszlopai lineárisan függetlenek, és legyen $A_{k*} = \boldsymbol{v}^T A_{S*}$ , ahol $k \notin S$. Ekkor létezik egy olyan $\boldsymbol{u}$, melyre $A_{*k} = A_{*S}\boldsymbol{u}$, ahol szükségképpen $\boldsymbol{u}_i = 0$ vagy $\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{v}_i > 0$ $\forall i$-re.*

*Bizonyítás.* Legyen $A$ egy $r$ rangú mátrix, $|S| = h$ és legyen $R, S \subset R \subset N, |R| = r$,melyre $A$ $i \in R$ oszlopai lineárisan függetlenek.
Általánosítás nélkül feltesszük, hogy $S = \{1, \ldots, h\}, R = \{1, \ldots, r\}, k = \mathbf{u}$. Megoldjuk az $A_{*u} = A_{*S}\mathbf{u}$ egyenletet, és az $A_{u*} = \mathbf{v}^T A_{S*}$ egyenletet felhasználva a dupla pivotálási sémát.
A kezdő tábla a következő:

$$\text{A:}\quad \begin{array}{r|c|c|c|c|c}
 & u & 0 & 0 & -1 & \\
\hline
0= & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & -\mathbf{v} \\
0= & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 \\
0= & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 \\
0= & A_{41} & A_{42} & A_{43} & a_{uu} & 1 \\
\hline
 & 0= & 0= & 0= & 0= &
\end{array}$$

ahol $A_{11}$ és $A_{22}$ h illetve $(r-h)$ rangú. A $\mathscr{P}_R$ művelet adja a következő táblát $A$-ból:

$$\text{B:}\quad \begin{array}{r|c|c|c|c|c}
 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\
\hline
\mathbf{u}= & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & 0 \\
0= & B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & 0 \\
0= & B_{31} & B_{32} & 0 & 0 & 0 \\
0= & B_{41} & B_{42} & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & \mathbf{v}= & 0= & 0= & 0= &
\end{array}$$

Itt $B_{42} = 0$ (mivel $A_{u*} = \mathbf{v}^T A_{S*}$ egyenletnek van megoldása) ebből az következik, hogy $B_{24} = 0$ (mert $B$ oszlop elégséges).
Így az $A_{*u} = A_{*S}\mathbf{u}$ egyenletnek egy egyedülálló megoldása $\mathbf{u} = -B_{14}$. Továbbá az $A_{u*} = \mathbf{v}^T A_{S*}$ egyenlet egyedülálló megoldása $\mathbf{v} = B_{41}^T$.
Végül $B$ oszlop elégségességéből következik, hogy $\mathbf{u}_i = 0$ vagy $\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i > 0$ $\forall i$-re. ■

A következőkben ahhoz, hogy meg tudjunk adni egy eljárást arra, hogy vajon az $(n-1)$-ed rendben oszlop (sor) elégséges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, oszlop (sor) elégséges-e $n$-ed rendben, ahhoz segítségképp kimondunk néhány tételt és ezek következményeit.

**3.2.12. Tétel.** *Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix (sor, oszlop) elégséges akkor és csak akkor, ha minden diagonálisbeli elemen való pivotálási művelettel nyert mátrixa (sor, oszlop) elégséges másod rendben.*

**3.2.13. Tétel.** *Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix $(n-1)$-ed rendben (sor, oszlop) elégséges és* $\det A > 0$, *akkor $A$ (sor, oszlop) elégséges.*

*Bizonyítás.* (Az oszlop elégséges eset)
Megjegyezzük, hogy $A \in \mathcal{P}_0$. Épp ellenkezőleg feltesszük, hogy van egy olyan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre $\mathbf{x} * \mathbf{y} \leq 0$ és $\mathbf{x} * \mathbf{y} \neq 0$, ahol $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.
Két esetet különböztetünk meg:

1. $\mathbf{x}_k = 0$ valamely $k$-ra. Ekkor $\mathbf{x}_{N-k} * \mathbf{y}_{N-k} \leq 0$ és $\mathbf{x}_{N-k} * \mathbf{y}_{N-k} \neq 0$ ellentmond az $A_{N-k,N-k}$ mátrix oszlop elégségességének.

2. $\mathbf{x}_i \neq 0, \forall i - re.$ Általánosítás nélkül feltesszük, hogy $\mathbf{x} > \mathbf{0}, \mathbf{y} \leq \mathbf{0}$.
   Legyen $\mathbf{z} = -A^{-1}\mathbf{e}$ ahol $\mathbf{e} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ és választunk egy valós számot $c > 0$, amely olyan kicsi, hogy $\bar{\mathbf{x}} := \mathbf{x} + c \cdot \mathbf{z} > 0$ , így van $\bar{\mathbf{y}} := A\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - c\mathbf{e} < 0$, ami ellentmond a 3.2.3. Tétel-nek.

■

**3.2.14. Tétel.** *Az $r < n$ rangú $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix (oszlop, sor) elégséges akkor és csak akkor, ha $(r+1)$-ed rendben (sor, oszlop) elégséges.*

*Bizonyítás.* (Az oszlop elégséges eset)
Szükségesség: triviális.
Elégségesség: Alkalmazzuk 3.2.12. Tétel-t. Legyen $B = \mathscr{P}_R A, R \subset N$, és legyen $S \subset N, |S| = 2$. Természetesen $|R| \leq r$.
Meg kell mutatnunk, hogy $B_{SS}$ oszlop elégséges. Két esetet különböztetünk meg:

1. $|R \cup S| \leq r + 1$. Ekkor $A_{R\cup S, R\cup S}$ oszlop elégséges, és így $B_{R\cup S, R\cup S}$ és $B_{SS}$ is.

2. $|R| = r, R \cap S = \emptyset$. Most $B_{SS} = 0$, lásd (3.1).

■

**3.2.15. Tétel.** *Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, melyre* $\det A > 0$ *(sor, oszlop) elégséges $k$-ad rendben $(1 \leq k \leq n-1)$ és $A^{-1}$ (sor, oszlop) elégséges $(n-k)$-ad rendben, akkor $A$ (sor, oszlop) elégséges.*

*Bizonyítás.* (Az oszlop elégséges eset) Ha $k = 1$ vagy $k = n-1$, használjuk 3.2.13. Tétel-t $A^{-1}$-re vagy $A$-ra. Majd feltesszük, hogy $2 \leq k \leq n-2$. Használni fogjuk 3.2.12. Tétel-t. Legyen $C = A^{-1}, B = \mathscr{P}_R A = \mathscr{P}_{\bar{R}} C$, ahol $R \subset N, S \subset N$ és $|S| = 2$.
Meg kell mutatnunk, hogy $B_{SS}$ oszlop elégséges. Három esetünk van:

1. $|R \cup S| \leq k$. Most $A_{R\cup S, R\cup S}$ oszlop elégséges és így $B_{R\cup S, R\cup S}$ és $B_{SS}$ is az.

2. $|R\cup S|\geq k+2$. Ekkor $|R\cup S|+|\bar{R}\cup S|=|R|+|\bar{R}\cap S|+|\bar{R}|+|R\cap S|=n+2$ , ahonnan $|\bar{R}\cup S|=n+2-|R\cup S|\leq n-k$. Most $C_{\bar{R}\cup S,\bar{R}\cup S}$ oszlop elégséges és így $B_{\bar{R}\cup S,\bar{R}\cup S}$ és $B_{SS}$ is az.

3. $|R\cup S|=k+1$. Ezen belül három alesetet különböztetünk meg:

   (a) $|R|=k+1, S\subset R$. Most a nemszinguláris $A_{RR}$ mátrix, melynek rangja $(k+1)$, oszlop elégséges $k$-ad rendben. Továbbá $\det(A_{RR})=\det(A)\div\det(B_{\bar{R}\bar{R}})=\det(A)\det(C_{\bar{R}\bar{R}})>0$. Így $A_{RR}$ oszlop elégséges (lásd 3.2.13. Tétel) és így $B_{RR}$ és $B_{SS}$ is az.

   (b) $|R|=k-1, S\subset\bar{R}$. Használjuk (a)-t $A$-ra, $R$-re és $A^{-1}$-re, $\bar{R}$-ra.

   (c) $|R|=k, S=\{s,t\}$, ahol $s\in R, t\in\bar{R}$. Most $B_{RR}$ és $B_{\bar{R}\bar{R}}$ oszlop elégségesek. Ha $b_{ss}>0$, használjuk (b.)-t $R$ helyére $(R-s)$-t helyettesítve. Ha $b_{tt}>0$, használjuk (a.)-t $R$ helyére $(R+t)$-t helyettesítve.

Így csak az az eset marad, hogy $b_{ss}=b_{tt}=0$. Feltesszük, hogy $B_{SS}$ nem oszlop elégséges. Két lehetőség van. Először, ha $b_{ts}\neq 0, b_{st}b_{ts}\geq 0$ , akkor van egy $h\in R$, melyre $b_{hs}\neq 0$ (akkor $b_{hs}b_{sh}<0$)).
Tekintsük a $D:=\mathscr{C}_{hs}\mathscr{P}_{sh}\mathscr{P}_{hs}B=\mathscr{P}_{R\setminus\{h,s\}}A$ mátrixot, amely oszlop elégséges másod rendben (lásd 3.2.1. Lemma), ez ellentmond annak a ténynek, hogy $d_{hh}=0\neq d_{th}$ és $d_{ht}d_{th}\geq 0$. Másrészt, ha $b_{ts}=0\neq b_{st}$, használjuk az előző esetet $A,R,s$-re és $A^{-1},\bar{R},t$-re. ■

**3.2.16. Tétel.** *Az* $A=\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix, amelyben a nulla blokkok négyzetesek (sor, oszlop) elégséges akkor és csak akkor, ha* $B$ *és* $-C^T$ *összes megfelelő minorjának előjele megegyezik.*

*Bizonyítás.* (Az oszlop elégséges eset)
Legyen $B$ egy $(m\times(n-m))$ rangú mátrix, és számozzuk $B$ oszlopait, illetve $C$ sorait $m+1,\dots,n$-nel.
Szükségesség: Legyen $R\subset M:=\{1,\dots,m\}$, és $S\subset\bar{M}$, ahol $|R|=|S|$. A 3.2.7. Tétel miatt: $\det(A_{R\cup S,R\cup S})=\det(B_{RS})\det(-C_{SR})\geq 0$. Továbbá $\det(B_{RS})\neq 0$
$\Rightarrow$ Az $A_{R\cup S,R\cup S}$ mátrix $i\in S$ oszlopai lineárisan függetlenek.
$\Rightarrow$ Az $A_{R\cup S,R\cup S}$ mátrix $i\in S$ sorai lineárisan függetlenek (3.2.10. Tétel miatt).
$\Rightarrow\det(C_{SR})\neq 0$.
Hasonlóan: $\det(C_{SR})\neq 0\Rightarrow\det(B_{RS})\neq 0$.
Elégségesség: Használjuk 3.2.12. Tétel-t. Ha $D=\mathscr{P}_T A, T\subset N$, akkor $T=R\cup S$, ahol $R\subset M, S\subset\bar{M}, |R|=|S|$ és $A_{RS}=B_{RS}$ és $A_{SR}=C_{SR}$ nemszingulárisak.
Így $D$ egy diagonális permutációja az $E:=\mathscr{P}_{SR}\mathscr{P}_{RS}A$ mátrixnak.
Itt $\mathscr{P}_{RS}$ csak $B$-re van hatással, és $\mathscr{P}_{SR}$ csak $C$-re van hatással.
Ez elegendő, hogy megmutassuk, hogy $\mathbf{e}_{ij}$ és $\mathbf{e}_{ji}$-nek ellenkező az előjele minden $(i,j)\in M\times\bar{M}$ esetén. Ez következik a 3.2.2. Tétel-ből. ■

**3.2.17. Tétel.** *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy $r$ $(1 \le r \le n-1)$ rangú mátrix. Ekkor:*

1. *Ha A r-ed rendben oszlop (sor) elégséges, akkor ez oszlop (sor) elégséges akkor és csak akkor, ha bármely $R \subset N$, ahol $|R| = r$ esetén, $\det(A_{RR}) = 0 \Rightarrow A$ mátrix $i \in R$ oszlopai (sorai) lineárisan összefüggőek.*

2. *Ha A r-ed rendben elégséges, akkor ez elégséges akkor és csak akkor, ha bármely $R \subset N$, ahol $|R| = r$ esetén, $\det(A_{RR}) = 0 \Rightarrow$ az A mátrix $i \in R$ sorai és oszlopai is lineárisan összefüggőek.*

*Bizonyítás.* (Az oszlop elégséges eset)
Szükségesség: lásd 3.2.9. Tétel.
Elégségesség: Tegyük fel, hogy $A$ nem oszlop elégséges 3.2.12. Tétel és a 3.2.14. Tétel bizonyítása miatt a következő két lehetőségünk adódna:

1. Van egy $R \subset N, |R| = r-1$ halmazunk, és egy $S = \{s,t\} \subset \bar{R}$, ahol $s \neq t$ halmazunk, amelyre a $B := \mathscr{P}_R A$ mátrixban a $B_{SS}$ részmátrix nem oszlop elégséges. $B_{SS}$-nek szingulárisnak kell lennie, mivel különben $A$-nak a rangja nagyobb lenne, mint $r$ (lásd 3.1). Általánosítás nélkül tegyük fel, hogy $b_{ss} = b_{st} = 0 \neq b_{ts}$(lásd 3.2.18. Tétel). De ekkor $A_{R+s,R+s}$ szinguláris (mivel $b_{ss} = 0$), és az $A$ mátrix $i \in R+s$ oszlopai lineárisan függetlenek (mivel $b_{ts} \neq 0$), ez ellentmondás.

2. Van egy $R \subset N, |R| = r$ halmazunk, és egy $S = \{s,t\}$, ahol $s \in R, t \in \bar{R}$ halmazunk, amelyre a $B := \mathscr{P}_R A$ mátrixban a $B_{SS}$ részmátrix nem oszlop elégséges. Megjegyezzük, hogy $b_{tt} = 0$. Ha $b_{ss} > 0$, használjuk (a.)-t az $R$ helyére $(R-s)$-t helyettesítve.
Azután tegyük fel, hogy $b_{ss} = 0$.
Az az eset, amelyben $b_{ts} \neq 0, b_{st}b_{ts} \ge 0$ lehetetlen, a 3.2.15. Tétel 3. esetének bizonyítása alapján.
A maradék esetben, ahol $b_{ts} = 0 \neq b_{st}$ választunk egy $h \in R$ elemet, amelyre $b_{hs} \neq 0$ (ekkor $b_{sh} \neq 0$).
A $C := \mathscr{P}_{R\setminus\{h,s\}} A = \mathscr{P}\{h,s\}, B = \mathscr{C}_{hs}\mathscr{P}_{sh}\mathscr{P}_{hs} B$ mátrixban $c_{hh} = c_{th} = 0, c_{ht} \neq 0$ és $c_{sh} \neq 0$.
Így $A_{TT}$, ahol $T = R + t - s$ szinguláris, amíg az $A$ mátrix $j \in T$ oszlopai lineárisan függetlenek, ez ellentmondás.

■

Tekintsük azt az esetet, mikor az adott $A$ mátrix rangja kettő:

**3.2.18. Tétel.** *Legyen az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix olyan, hogy diagonálisa nemnegatív. Ha $\det(A) > 0$, akkor A elégséges. Ha $\det(A) = 0$ ,akkor:*

1. *A oszlop elégséges akkor és csak akkor, ha $a_{ii} = 0 \Rightarrow A_{*i} = 0, i = 1,2$ esetén.*

2. *A sor elégséges akkor és csak akkor, ha $a_{ii} = 0 \Rightarrow A_{i*} = 0, i = 1,2$ esetén.*

3. *A elégséges akkor és csak akkor, ha $a_{ii} = 0 \Rightarrow A_{*i} = 0 és A_{i*} = 0, i = 1,2$ esetén.*

*Különösen bármely $(2 \times 2)$-es $\mathcal{P}_0$ mátrix pozitív diagonálissal elégséges.*

*Bizonyítás.* (Az oszlop elégséges eset)
Ha $\det(A) > 0$, felhasználjuk 3.2.13. Tétel-t. Ha $\det(A) = 0$, használjuk R. W. Cottle és S.-M. Guu által kimondott lemmát [13], tekintsük a következő három esetet:

1. $a_{11} = a_{22} = 0$
2. $a_{11}$ és $a_{22}$ közül pontosan egy pozitív
3. $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} > 0$.

■

Most megmutatjuk a fent felsorolt és bizonyított tételek számunkra fontos következményeit.

**3.2.1. Következmény.** *Legyen az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy olyan mátrix, melynek rangja 0 és a diagonálisa nemnegatív. Ekkor:*

1. *A oszlop elégséges akkor és csak akkor, ha $a_{ii} = 0 \Rightarrow A_{*i} = 0$ $\forall i \in N$ esetén.*
2. *A sor elégséges akkor és csak akkor, ha $a_{ii} = 0 \Rightarrow A_{i*} = 0$ $\forall i \in N$ esetén.*
3. *A elégséges akkor és csak akkor, ha $a_{ii} = 0 \Rightarrow A_{i*} = 0$ és $A_{*i} = 0$ $\forall i \in N$ esetén.*

*Különösen, A elégséges, ha diagonálisa pozitív.*

**3.2.2. Következmény.** *Legyen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\} és A = \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ekkor:*

1. *A oszlop elégséges akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{x}_i = 0$ vagy $\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i > 0$ $\forall i \in N$ esetén.*
2. *A sor elégséges akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{y}_i = 0$ vagy $\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i > 0$ $\forall i \in N$ esetén.*
3. *A elégséges akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i = 0$ vagy $\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i > 0$ $\forall i \in N$ esetén.*

**3.2.3. Következmény.** *Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, melynek rangja $r$, egy $\mathcal{P}$ mátrix $r$-ed rendben, ekkor elégséges is.*

**3.2.4. Következmény.** *Bármely $\mathcal{P}_1$-beli mátrix elégséges.*

**3.2.19. Tétel.** *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, melynek rangja $r < n$ és oszlop (sor) elégséges $r$-ed rendben, és legyenek az $A$ mátrix $i \in R \subset N$ oszlopai (sorai), melyre $|R| = r$ lineárisan függetlenek.*
*Ha $A_{RR}$ szinguláris, akkor $A$ nem oszlop (sor) elégséges. Különben, felhasználva a $B = \mathcal{P}_R A$ jelölést, $A$ oszlop (sor) elégséges akkor és csak akkor, ha bármely nemnulla minorja a $B_{R\bar{R}}$ ($B_{\bar{R}R}$) mátrixnak és a megfelelő minorja a $-B^T_{\bar{R}R}$ ($-B^T_{R\bar{R}}$ ) mátrixnak az előjele megegyezik.*

*Bizonyítás.* (Az oszlop elégséges eset)
Az az eset, mikor $\det(A_{RR}) = 0$ a 3.2.9. Tétel miatt teljesül. Ekkor tegyük fel, hogy $\det(A_{RR}) > 0$.
Szükségesség megalapozott, úgy, mint $\det(B_{RS}) \neq 0 \Rightarrow \det(C_{RS}) \neq 0$ a 3.2.16. Tétel szükségességének bizonyításában.

Elégségesség: Használjuk 3.2.17. Tétel 1. részét.
Most $B_{\bar{R}\bar{R}} = 0$ és használjuk T.D. Parsons 1970-ben kimondott tételét [14], miszerint

$$\{H \subset N||H| = r, \det(A_{HH}) = 0\} = \{R\backslash S \cup T|S \subset R, T \subset \bar{R}, |S| = |T|, \det(B_{ST}) = 0\} \quad (3.5)$$

Tekintsük az $S$, $T$ halmazok bármelyikét, amely kielégíti a (3.5) feltételeit. Meg kell mutatnunk, hogy az $A$ mátrix $i \in R\backslash S \cup T$ oszlopai lineárisan összefüggőek, vagy ezzel ekvivalens, hogy az $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ egyenletnek, ahol $\mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{x}_S = 0, \mathbf{x}_{\bar{R}\backslash T} = 0$, van egy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ megoldása.
Most $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ ekvivalens a $\mathbf{w} = B\mathbf{z}$ egyenlettel, ahol $\mathbf{w}$ megkapható $\mathbf{y}$-ból úgy, hogy $\mathbf{y}_R$ helyére $\mathbf{x}_R$-t helyettesítünk és $\mathbf{z}$ megkapható $\mathbf{x}$-ből úgy, hogy $\mathbf{x}_R$ helyére $\mathbf{y}_R$-t helyettesítünk.
Könnyű látni, hogy ezen egyenletnek a $(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \neq \mathbf{0}$ megoldása.
Vegyük az $\bar{\mathbf{x}}_T \neq \mathbf{0}$ vektort, melyre $B_{ST}\bar{\mathbf{x}}_T = \mathbf{0}$, ekkor $\mathbf{z}$, melyre $\mathbf{z}_T = \mathbf{x}_T = \bar{\mathbf{x}}_T, \mathbf{z}_{\bar{T}} = \mathbf{0}$ megad egy olyan $\mathbf{w}$-t, melyre $\mathbf{w}_{R\backslash S} = \mathbf{x}_{R\backslash S} = B_{R\backslash S,T}\bar{\mathbf{x}}_T, \mathbf{w}_{\bar{R}\cup S} = \mathbf{0}$.
Tehát az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek van egy nemtriviális megoldása. ■

**3.2.5. Következmény.** *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy $(n-1)$ rangú mátrix, és legyen $B = \mathscr{P}_{N-k}A$. Ekkor:*

1. *Ha az $A$ mátrix $(n-1)$-ed rendben oszlop (sor) elégséges, akkor ez oszlop (sor) elégséges akkor és csak akkor, ha $b_{ik} = 0$ $(b_{ki} = 0)$ vagy $b_{ik}b_{ki} < 0$ $\forall i \neq k$ esetén.*
2. *Ha az $A$ mátrix $(n-1)$-ed rendben elégséges, akkor ez elégséges akkor és csak akkor, ha $b_{ik} = b_{ki} = 0$ vagy $b_{ik}b_{ki} < 0$ $\forall i \neq k$ esetén.*

**3.2.20. Tétel.** *Legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix $(n-1)$ -ed rendben oszlop (sor) elégséges. Ekkor $A$ nem oszlop (sor) elégséges akkor és csak akkor, ha valamelyik a kettő közül teljesül:*

1. $\det(A) < 0$ *vagy*
2. *$rank(A) = n-1$ és van egy olyan $k \in N$, melyre $A_{N-k,N-k}$ szinguláris amíg az $i \in N-k$ oszlopok (sorok) lineárisan függetlenek.*

*Bizonyítás.* Elégségesség: lásd 3.2.7. Tétel és 3.2.9. Tétel.
Szükségesség: ha $\det(A) \geq 0$, akkor A szinguláris a 3.2.13. Tétel miatt. Ha $rank(A) < n-1$, akkor $A$ oszlop (sor) elégséges a 3.2.14. Tétel miatt. Tehát $rank(A) = n-1$. A tételben említett $k$ létezése a 3.2.17. Tétel miatt egyértelmű. ■

**3.2.1. Példa.** *Nézzük meg, hogy adott n-ek esetén, n-et növelve, hogyan dönthetjük el, hogy az adott $A \in \mathbb{R}^{n\times n}\backslash\{0\}$ mátrix vajon (sor, oszlop) elégséges-e felhasználva a fejezetben megemlített tételeket és következményeket.*

$n = 2$: *Használjuk a 3.2.18. Tétel-t.*
$n = 3$: *Ha* $\det(A) > 0$, *használjuk 3.2.13. Tétel-t. Ha $rank(A) = 2$, használjuk 3.2.17. Tétel-t. Ha $rank(A) = 1$, használjuk a 3.2.1. Következmény-t..*
$n = 4$: *Ha* $\det(A) > 0$, *használjuk a 3.2.13. Tétel-t, vagy 3.2.15. Tétel-t ($k = 2$ esetén). Ha A szinguláris, használjuk 3.2.19. Tétel-t.*
$n = 5$: *Ha* $\det(A) > 0$, *használjuk 3.2.15. Tétel-t ($k = 3$ esetén). Ha A szinguláris, használjuk 3.2.19. Tétel-t.*

Ahhoz, hogy az az eljárás, mely során az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix (sor, oszlop) elégségességét teszteljük, miszerint egy $(k-1)$-ed rendben (sor, oszlop) elégséges mátrix, vajon $k$-ad rendben is (sor, oszlop) elégséges-e, ennek végességének biztosítására felhasználjuk a következő lemmát:

**3.2.2. Lemma.** *Legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, melynek rangja $r$, és $(n-1)$-ed rendben (sor, oszlop) elégséges. Tegyük fel, hogy szimpla vagy dupla diagonálisbeli elemen való pivotálási kondenzációt használunk $A$-ra, ameddig csak lehet. Ekkor:*

1. *Ha $r \neq n-1$ , az eljárást addig folytathatjuk, amíg egy $(n-r)$-ed rendű nulla mátrixot nem kapunk.*

2. *Ha $r = n-1$ , az eljárást addig folytathatjuk, amíg a következő három típusú mátrix közül egyet meg nem kapunk:*

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} a, b \neq 0 \tag{3.6}$$

*Bizonyítás.* Indukció $n$-re. Az $n=1$ és $n=2$ eset triviális.
Tegyük fel, hogy a lemma teljesül $< n$ esetén és legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 3$ , mely teljesíti a feltevést.
Ha $A = 0$, akkor nincs mit bizonyítani.
Ha $A \neq 0$ és az $A$ mátrix diagonálisa nemnulla, válasszunk egy olyan $k \in N$ elemet, melyre $a_{kk} > 0$ és használjuk az indukciót a $B := \mathscr{P}_k^* A$-ra, lásd (3.1) és 3.2.1 Lemma-t. Ha $A \neq 0$ és $a_{ii} = 0$ $\forall i \in N$ esetén, válasszuk a $(h,k) \in N \times N$ párt, melyre $a_{hk} \neq 0$.
Ekkor $a_{kh} \neq 0$, mivel $A$ (sor, oszlop) elégséges másod rendben.
Végül használjuk az indukciót a $B := \mathscr{P}_{\{h,k\}}^* A$-ra. ■

Nincs más hátra, mint hogy megadjuk az eddig előkészített rekurzív eljárást.

**3.2.1. Eljárás.** *(Leellenőrizzük, hogy vajon az (n-1)-ed rendben oszlop (sor) elégséges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, oszlop (sor) elégséges-e.)*

1. *S1: Legyen $B = A$, $k = n$, $K = N$.*

2. *S2: Ha $B_{KK} \neq 0$, menjünk S3-ra.*
   *Ha $k \geq 2$, álljunk meg, $A$ oszlop (sor) elégséges.*
   *Ha $k = 1$, álljunk meg, legyen $K = \{h\}$, $A$ oszlop (sor) elégséges akkor és csak akkor, ha $b_{ih} = 0$ $(b_{hi} = 0)$ vagy $b_{ih}b_{hi} < 0$ $\forall i \in N - h$ esetén.*

3. *S3: Ha $k > 1$, menjünk S4-re.*
   *Ha $k = 1$, álljunk meg, legyen $K = \{h\}$, $A$ oszlop (sor) elégséges akkor és csak akkor, ha $b_{hh} > 0$.*

4. *S4: Ha $B_{KK}$-nak a diagonálisa 0, akkor menjünk S5-re. Különben válasszunk olyan $i \in K$ elemet, melyre $b_{ii} > 0$, legyen $B \leftarrow \mathscr{P}_i B, K \leftarrow K - i, k \leftarrow k-1$, és menjünk S2-re.*

5. *S5: Ha $k = 1$, álljunk meg, $A$ oszlop (sor) elégséges akkor és csak akkor, ha $\det(B_{KK}) > 0$.*
   *Ha $k > 2$, válasszunk egy $(i,j) \in K \times K$ párt, melyre $b_{ij} \neq 0$,*
   *legyen $B \leftarrow \mathscr{P}_{\{i,j\}} B, K \leftarrow K \backslash \{i,j\}, k \leftarrow k-2$, és menjünk S2-re.*

Az eljárás során a használt szimpla pivot műveletek száma legfeljebb $(n-1)$, ami azt jelenti, hogy ehhez legfeljebb $n^2(n-1)$ művelet szükséges (szorzások vagy osztások). Tehát, leellenőrizni, hogy vajon az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, mely $(k-1)$-ed rendben (sor, oszlop) elégséges, az $k$-ad rendben (sor, oszlop) elégséges-e, ennek műveletigénye legfeljebb $k^2(k-1)\binom{n}{k}$, ahol az $\binom{n}{k}$ egy binomális együttható.
Ezen eljárás javítható, műveletigénye csökkenthető, mégpedig úgy, hogy az összes pivotálási műveletet helyettesítjük pivot kondenzációval. Ehhez szükségünk lehet a következő eredményekre.

**3.2.21. Tétel.** *Legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy $(n-1)$ rangú, $(n-1)$-ed rendben (sor, oszlop) elégséges mátrix, és legyenek az $A$ mátrix 0 saját értékéhez tartozó jobb- és baloldali sajátvektorai, $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $A$ (sor, oszlop) elégséges akkor és csak akkor, ha $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T$ vagy $-\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^T$ is az.*

*Bizonyítás.* (Az oszlop elégséges eset.)
Három esetünk van a (3.6)-ban megadott végső mátrixokat figyelembe véve:

1. A 3.2.2. Lemma-ban említett eljárás [0] mátrixszal végződik. Általánosítás nélkül tegyük fel, hogy $A^{[n-1]}$ nemszinguláris. Meghatározzuk $\mathbf{x}$-et és $\mathbf{y}$-t, felhasználva a dupla pivotálási sémát:

$$\begin{array}{r|cc|l} & \mathbf{x}^1 & \mathbf{x}_n & \\ \hline 0= & A_{11} & A_{12} & \text{-}\mathbf{y}^1 \\ 0= & A_{21} & a_{nn} & \text{-}\mathbf{y}_n \\ \hline & 0= & 0= & \end{array} \quad \xrightarrow{\mathscr{P}_{(1)}}$$

$$\begin{array}{r|cc|l} & 0 & \mathbf{x}_n & \\ \hline \mathbf{x}^1= & B_{11} & B_{12} & 0 \\ 0= & B_{21} & 0 & \text{-}\mathbf{y}_n \\ \hline & \mathbf{y}^1= & 0= & \end{array}$$

Válasszuk $\mathbf{x}_n$-t, $\mathbf{y}_n$-t úgy, hogy $\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n > 0$, megkapjuk például, hogy $\mathbf{x}^T = [B_{12}^T, 1], \mathbf{y}^T = [-B_{21}, 1]$.
A 3.2.2. Következmény és 3.2.5. Következmény alapján $A$ oszlop elégséges akkor és csak akkor, ha $\mathbf{y}\mathbf{x}^T$ is az. Ha $\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n$-t úgy választottuk, hogy $\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n < 0$, akkor $A$ oszlop elégséges akkor és csak akkor, ha $-\mathbf{y}\mathbf{x}^T$ is az.

2. A 3.2.2. Lemma-ban említett eljárás az (3.6) második mátrixában végződik. Általánosítás nélkül tegyük fel, hogy $A^{[n-2]}$ nemszinguláris.
Ahhoz, hogy meghatározzuk $\mathbf{x}$-et és $\mathbf{y}$-t, a bizonyítás első táblájából haladunk a következő felé:

$$\begin{array}{r|ccc|l} & 0 & \mathbf{x}_{n-1} & \mathbf{x}_n & \\ \hline \mathbf{x}^2= & B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 \\ 0= & B_{21} & 0 & \mathrm{a} & \text{-}\mathbf{y}_{n-1} \\ 0= & B_{31} & 0 & 0 & \text{-}\mathbf{y}_n \\ \hline & \mathbf{y}^2= & 0= & 0= & \end{array}$$

ahol $\mathbf{x}^2 = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-2})$, $\mathbf{y}^2 = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-2})$ és $a \neq 0$.

Ki kell választanunk az $\mathbf{x}_n = 0 \neq \mathbf{x}_{n-1}$ és $\mathbf{y}_{n-1} = 0 \neq \mathbf{y}_n$ elemeket. De ekkor sem $A$, sem $\mathbf{yx}^T$, sem $-\mathbf{yx}^T$ nem oszlop elégséges.

3. A 3.2.2. Lemma-ban említett eljárás (3.6) harmadik mátrixában végződik. Ez az eset hasonló a 2.-hoz.

■

**3.2.6. Következmény.** *Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, melynek rangja $(n-1)$, (sor, oszlop) elégséges, akkor $adj(A)$ (oszlop, sor) elégséges.*

*Bizonyítás.* (Az oszlop elégséges eset.)
Legyen az $A$ mátrix 0 sajátértékéhez tartozó jobb- baloldali sajátvektor $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$. Általánosítás nélkül tegyük fel, hogy $\det(A^{[n-1]}) > 0$ és $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n = 1$ (lásd 3.2.21. Tétel bizonyítása).
Mivel $A(adj(A)) = A^T(adj(A))^T = 0$ ezért, az $adj(A)$ oszlopai (sorai) az $\mathbf{x}(\mathbf{y}^T)$ többszörösei, ahonnan $adj(A) = \alpha\mathbf{xy}^T = \alpha(\mathbf{yx}^T)^T$, ahol $\alpha = \det(A^{[n-1]})$.
Végül alkalmazzuk 3.2.21. Tétel-t. ■

Tehát a fent említett eljárás oly módon tökéletesíthető, hogy a pivot műveletek helyett pivot kondenzációt alkalmazunk, kivéve a 3.2.2. Lemma 2. részében, hiszen ekkor a [0] mátrixot kapjuk. Így ebben az esetben a 3.2.21. Tétel-t alkalmazzuk. Az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ jobb- és baloldali sajátvektorok Gauss eliminációval meghatározhatóak. Egy egyszerű numerikus példával szemléltetjük az előbbi eljárás gyakorlati alkalmazását.

**3.2.2. Példa.** *Ellenőrizzük, hogy az adott mátrix vajon (sor, oszlop) elégséges-e.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Az $A$ mátrix rangja 3, 3-ad rendben elégséges, és $A^{[3]}$ nemszinguláris. Meghatározzuk a 0 sajátértékéhez tartozó jobboldali $\boldsymbol{x}$ sajátvektort és a baloldali $\mathbf{y}$ sajátvektort úgy, hogy használjuk a pivot kondenzációt a dupla sémában (pivot pozíciókat félkövéren jelöltük):*

3.1. táblázat. A

| | $\mathbf{x}_1$ | $\mathbf{x}_2$ | $\mathbf{x}_3$ | $\mathbf{x}_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0= | **1** | 1 | 1 | -1 | -$\mathbf{y}_1$ | |
| 0= | 1 | 1 | 2 | -2 | -$\mathbf{y}_2$ | $\longrightarrow$ |
| 0= | 1 | -1 | 1 | -3 | -$\mathbf{y}_3$ | |
| 0= | 0 | 2 | 1 | 1 | -$\mathbf{y}_4$ | |
| | 0= | 0= | 0= | 0= | | |

3.2. táblázat. $\bar{B}$

$$\begin{array}{r|ccc|l}
 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \\ \cline{2-4}
0= & 0 & \mathbf{1} & -1 & -\mathbf{y}_2 \\
0= & -2 & 0 & -2 & -\mathbf{y}_3 \quad \longrightarrow \\
0= & 2 & 1 & 1 & -\mathbf{y}_4 \\ \cline{2-4}
 & 0= & 0= & 0= &
\end{array}$$

3.3. táblázat. $\bar{C}$

$$\begin{array}{r|cc|l}
 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_4 & \\ \cline{2-3}
0= & \mathbf{-2} & -2 & -\mathbf{y}_3 \quad \longrightarrow \\
0= & 2 & 2 & -\mathbf{y}_4 \\ \cline{2-3}
 & 0= & 0= &
\end{array}$$

3.4. táblázat. $\bar{D}$

$$\begin{array}{r|c|l}
 & \mathbf{x}_4 & \\ \cline{2-2}
0= & 0 & -\mathbf{y}_4 \\ \cline{2-2}
 & 0= &
\end{array}$$

*Visszahelyettesítéssel meghatározzuk az $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}$ vektorokat, legyen $\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{y}_4 = 1$. A $\bar{C}$ táblában lévő pivot sorból és oszlopból a következőket kapjuk: $\boldsymbol{x}_2 = -1, \boldsymbol{y}_3 = 1$.*
*Hasonlóan, a $\bar{B}$ tábla a következőket adja: $\boldsymbol{x}_3 = 1, \boldsymbol{y}_2 = -1$ (ezen a ponton ellenőriznünk kell, hogy $\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3 > 0$ és $\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2 > 0$ teljesülnek-e).*
*Végül az $A$ táblából a következők adódnak: $\boldsymbol{x}_1 = 1, \boldsymbol{y}_1 = 0$. Tehát az adott $A$ mátrix sor, de nem oszlop elégséges.*

## 3.3. Elégséges mátrixok szükséges kappájának meghatározása

Abban az esetben, ha a lineáris komplementaritási feladat együttható mátrixa elégséges, megoldható a belső pontos eljárás segítségével. Azonban ezen módszer komplexitása akkor a legjobb, ha a mátrix szükséges kappája a lehető legkisebb.
Ezen fejezet célja egyrészt, hogy hatékony algoritmust adjunk az elégséges együttható mátrix szükséges kappájának meghatározására, valamint belátjuk, hogy egy elégséges mátrixnak és transzponáltjának szükséges kappája megegyezik.

**3.3.1. Tétel.** *Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix elégséges, akkor és csak akkor, ha létezik egy $\kappa \geq 0$ szám, melyre:*

$$(1 + 4\kappa) \sum_{i \in I_+(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i + \sum_{i \in I_-(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i \geq 0 \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \tag{3.7}$$

*esetén, ahol $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ és $I_+(\boldsymbol{x}) = \{i | \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i > 0\}$ és $I_-(\boldsymbol{x}) = \{i | \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i < 0\}$.*

Egy rögzített $\kappa$ esetén azt a mátrixosztályt, mely kielégíti (3.7)-et, $SU(\kappa)$-val fogjuk jelölni.

**3.3.1. Megjegyzés.** *Ez a mátrixosztály megegyezik a $\mathcal{P}_*(\kappa)$ osztállyal.*

Ahogy már említettük, minél kisebb az (3.7)-ben választott $\kappa$ szám, annál jobb az eljárás komplexitása. Így nagyon fontos, hogy megtaláljuk az (3.7)-et kielégítő legkisebb $\kappa$ számot. Ezt az értéket nevezzük az elégséges $A$ mátrix szükséges kappájának és $\hat{\kappa}(A)$-val jelöljük. Abban az esetben, ha $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, és $I_-(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ akkor $I_+(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ és az arány a következő:

$$F_A(\mathbf{x}) := \frac{-\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\sum\limits_{i \in I_+(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i (A\mathbf{x})_i} \tag{3.8}$$

amely jól definiálható. Így a következőt kapjuk az $A$ mátrix szükséges kappájára:

$$\hat{\kappa}(A) := \begin{cases} 0 & \textit{ha } A \in PSD \\ \frac{1}{4} sup\{F_A(\mathbf{x}) | \mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0\} & \textit{különben} \end{cases}$$

**3.3.2. Megjegyzés.** $F_A(\lambda \boldsymbol{x}) = F_A(\boldsymbol{x})$ *bármely* $\lambda \neq 0$ *esetén.*

**3.3.2. Tétel.** *Ha* $A \in \mathcal{P} \bigcap \mathbb{R}^{n \times n}$ *nem PD-beli, akkor létezik egy* $\widehat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$*, melyre* $\widehat{\kappa}(A) = \frac{1}{4} F_A(\widehat{\boldsymbol{x}})$

*Bizonyítás.* Abban az esetben, ha $A \in PSD$ , akkor az eredmény nyilvánvaló. Majd tegyük fel, hogy $A \notin PSD$.
Definiáljuk a következőt: $G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \ ||\mathbf{x}|| = 1\}$, ekkor a következőt kapjuk:
$\widehat{\kappa}(A) = \frac{1}{4} sup\{F_A(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in G\}$.
Az $F_A$ nevezője pozitív és folytonos a kompakt $G$ halmazon, és ezért eléri a legkisebb értékét $G$-ben. Ebből következik, hogy $F_A$ folytonos a $G$ halmazon és eléri legnagyobb értékét $G$-ben. ∎

**3.3.3. Megjegyzés.** *Megjegyezzük, hogy* $\widehat{\kappa}(A)$ $A \in \mathcal{P}$ *esetén egy folytonos függvénye az A elemeinek. Hiszen egy olyan függvény, amely folytonos egy kompakt halmazon, az egyenletesen folytonos azon a halmazon.*

**3.3.3. Tétel.** *Legyen* $A \in SU \bigcap \mathbb{R}^{n \times n}$. *Ekkor:*

1. *Az A mátrix szükséges kappája és az összes diagonális transzformáltjának szükséges kappája megegyezik.*

2. *Az A mátrix szükséges kappája legalább olyan nagy, mint az A összes megfelelő diagonális részmátrixának szükséges kappája.*

**3.3.4. Tétel.** *Legyen* $A \in SU(\kappa) \bigcap \mathbb{R}^{n \times n}$ , $P = diag(p_1, ..., p_n)$, $Q = diag(q_1, ..., q_n)$, *ahol* $\kappa \geq 0$ *és* $p_i q_i > 0$ $\forall i \in N$ *esetén. Ekkor* $B := PAQ \in SU(\kappa')$, *ahol* $\kappa' \geq \kappa$ *olyan, hogy*

$$\frac{1 + 4\kappa'}{1 + 4\kappa} = \frac{\max\limits_{i \in N} (p_i / q_i)}{\min\limits_{i \in N} (p_i / q_i)}$$

*Különösen, ha a D diagonális mátrix diagonális elemei nemnullák, akkor* $\widehat{\kappa}(DAD) = \widehat{\kappa}(A)$.

**3.3.5. Tétel.** *Legyen* $A = diag(A_1, A_2)$. *Ekkor* $\widehat{\kappa}(A) = max\{\widehat{\kappa}(A_1), \widehat{\kappa}(A_2)\}$.

**3.3.6. Tétel.** *Legyen $A \in SU \bigcap \mathbb{R}^{n\times n}$, és legyen $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy nemnegatív diagonális mátrix. Ekkor $\widehat{\kappa}(A+D) \le \widehat{\kappa}(A)$.*

*Bizonyítás.* Legyen $\widehat{\kappa} = \widehat{\kappa}(A)$, $D = diag(d_1, ..., d_n)$ és definiáljuk a következőt:
$I'_+(\mathbf{x}) = \{i \in N | \mathbf{x}_i[(A+D)\mathbf{x}]_i > 0\} = \{i \in N | x_i[A\mathbf{x}]_i + d_i\mathbf{x}_i^2 > 0\}$,
$I_+(\mathbf{x}) = \{i \in N | \mathbf{x}_i[A\mathbf{x}]_i > 0\}$.
Ezért, mivel $I_+(\mathbf{x}) \subset I'_+(\mathbf{x})$ , ezért $\mathbf{x}^T(A+D)\mathbf{x} + 4\widehat{\kappa} \sum\limits_{i\in I'_+(\mathbf{x})} (\mathbf{x}_i[A\mathbf{x}]_i + d_i\mathbf{x}_i^2)$
$\ge \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 4\widehat{\kappa} \sum\limits_{i\in I_+(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i[A\mathbf{x}]_i \ge 0.$ ■

**3.3.7. Tétel.** *Legyen $A \in SU \bigcap \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy nemnegatív diagonális mátrix, és legyen*

$A' = \begin{bmatrix} A & I \\ -I & D \end{bmatrix}$. *Ekkor $\widehat{\kappa}(A') = \widehat{\kappa}(A)$.*

**3.3.1. Következmény.** *Legyen $A \in SU \bigcap \mathbb{R}^{n\times n}$, $d \ge 0$, és legyen $A' = \begin{bmatrix} A & -\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_1^T & d \end{bmatrix}$.*
*Ekkor $\widehat{\kappa}(A') = \widehat{\kappa}(A)$.*

**3.3.8. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $A \in SU \bigcap \mathbb{R}^{n\times n}$ és $a_{ik} = a_{ih}$, $a_{ki} = a_{hi}$ $\forall i \in N - k$ és $a_{kk} \ge a_{hh}$ esetén. Ekkor $\widehat{\kappa}(A) = \widehat{\kappa}(A_{N-k,N-k})$.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel általánosítás nélkül, hogy $h = 1, k = n$. Ha $A_{1*} = 0$ akkor $A_{*1} = 0$ és a 3.2.5. Tétel következik.
Majd tegyük fel, hogy $A_{1*} \ne 0$. Ha $a_{11} > 0$, legyen $R = \{1\}$. Ha $a_{11} = 0$, akkor létezik egy olyan $p \in \{2, \ldots, n-1\}$ szám, melyre $a_{1p}a_{p1} < 0$, ekkor legyen $R = \{1, p\}$.
Mindkét esetben legyen $B = \mathscr{P}_R A$, $b_{1n} = -1$, $b_{n1} = 1$, $b_{nn} \ge 0$, és $b_{in} = b_{ni} = 0$, $i = 2, \ldots, n-1$.
Végül a 3.3.3. Tétel 1. és a 3.3.1. Következmény miatt a következő adódik:
$\widehat{\kappa}(A) = \widehat{\kappa}(B) = \widehat{\kappa}(B_{N-n,N-n}) = \widehat{\kappa}(A_{N-n,N-n})$. ■

A következő tétel a másodrendű elégséges indefinit mátrixok szükséges kappájának összes tulajdonságát tartalmazza.

**3.3.9. Tétel.** *Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix elégséges, de nem $PSD$-beli. Ekkor:*

$$1 + 4\widehat{\kappa}(A) = \frac{\max\{a_{12}^2, a_{21}^2\}}{(\sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{\det A})^2} \tag{3.9}$$

*Ha $A \notin \mathcal{P}$, akkor még egyszerűbben:*

$$1 + 4\widehat{\kappa}(A) = \max\{|\frac{a_{12}}{a_{21}}|, |\frac{a_{21}}{a_{12}}|\} \tag{3.10}$$

*Ha $a_{11}$=$a_{22}$=0, akkor a szuprémuma az $F(\boldsymbol{x}) := F_A(x)$ -nek elérhető bármely $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ vektor esetén, amelyre $sgn(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = -sgn(a_{12} + a_{21})$.*
*Ha $A \notin \mathcal{P}$ és $a_{11} + a_{22} > 0$, akkor a szuprémuma az $F(\boldsymbol{x})$-nek nem lenne elérhető. Az $F(\boldsymbol{x})$ értéke, mely tetszőlegesen közel van a szuprémumhoz, megkapható a következő választások esetén, ahol $\epsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi:*

| eset | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $a_{11} > 0 = a_{22}$ | $-\epsilon \cdot sgn(a_{12} + a_{21})$ | $1$ |
| $a_{11} = 0 < a_{22}$ | $1$ | $-\epsilon \cdot sgn(a_{12} + a_{21})$ |
| $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} > 0$ | $-a_{12} + \epsilon \cdot sgn(a_{12} - a_{21})$ | $a_{11}$ |

*Ha $A \in \mathcal{P}$, akkor az $F(\boldsymbol{x})$ szuprémuma elérhető a következő pontokban:*

| eset | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $\lvert a_{12}\rvert > \lvert a_{21}\rvert$ | $-a_{12}\sqrt{a_{22}}$ | $\sqrt{a_{11}}(\sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{\det A})$ |
| $\lvert a_{12}\rvert < \lvert a_{21}\rvert$ | $\sqrt{a_{22}}(\sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{\det A})$ | $-a_{21}\sqrt{a_{11}}$ |

*Bizonyítás.* Először tegyük fel, hogy $A \notin \mathcal{P}$

1. eset: $a_{11} \geq 0 = a_{22}$. Legyen $\mathbf{x}_2 = 1$, ekkor $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0 \Longrightarrow (a_{12} + a_{21})\mathbf{x}_1 < 0$. Két alesetet különböztetünk meg:

   (a) $|a_{12}| > |a_{21}|$ Ekkor:
   $(a_{11} + a_{21})\mathbf{x}_1 < 0 \Longrightarrow 0 < a_{21}\mathbf{x}_1 < -a_{12}\mathbf{x}_1 \Longrightarrow \mathbf{x}_2\mathbf{y}_2 = a_{21}\mathbf{x}_1 > 0 \Longrightarrow \mathbf{x}_1\mathbf{y}_1 < 0$.
   Így:
   $\bar{F}(\mathbf{x}_1) = -1 + \frac{-a_{11}\mathbf{x}_1^2 - a_{12}\mathbf{x}_1}{a_{21}\mathbf{x}_1} \leq -1 + \frac{-a_{12}}{a_{21}}$.
   Látjuk, hogy $supF(\mathbf{x}) = -1 - a_{12}/a_{21}$. Ha $a_{11} = 0$, akkor a szuprémum elérhető minden olyan vektor esetén, melyre $sgn(\mathbf{x}_1) = sgn(a_{21})$.
   Ha $a_{11} > 0$, akkor a szuprémum nem érhető el. Az $F(\mathbf{x})$ értéke, mely tetszőlegesen közel van a szuprémumhoz, megkapható az $\mathbf{x} = (\epsilon \cdot sgn(a_{21}), 1)$ vektort véve, ahol $\epsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi.

   (b) $|a_{12}| < |a_{21}|$. Most $0 < a_{12}\mathbf{x}_1 < -a_{21}\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\mathbf{y}_2 > 0, \mathbf{x}_1\mathbf{y}_1 > 0$, ahonnan:
   $\bar{F}(\mathbf{x}_1) = -1 + \frac{-a_{21}\mathbf{x}_1}{a_{11}\mathbf{x}_1^2 + a_{12}\mathbf{x}_1} \leq -1 + \frac{-a_{21}}{a_{12}}$.
   Megjegyezzük, hogy $supF(\mathbf{x}) = -1 - a_{21}/a_{12}$. Ha $a_{11}=0$, akkor a szuprémum elérhető minden olyan vektor esetén, melyre $sgn(\mathbf{x}_1) = sgn(a_{12})$.
   Ha $a_{11}>0$, akkor a szuprémum nem érhető el. Az $F(\mathbf{x})$ értéke, mely tetszőlegesen közel van a szuprémumhoz, megkapható az $\mathbf{x} = (\epsilon \cdot sgn(a_{12}), 1)$ vektort véve, ahol $\epsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi.

2. eset: $a_{11} = 0 \leq a_{22}$. Ez az eset visszavezethető az 1. esetre, úgy, hogy definiáljuk a következőket:
   $\mathbf{u} = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1), \mathbf{v} = (\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1), B = \mathscr{C}_{12}A$.

3. eset: $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} > 0$. Ez az eset visszavezethető az 1. esetre, úgy, hogy definiáljuk a következőket:
   $\mathbf{u} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2), \mathbf{v} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2), B = \mathscr{P}_1 A$.
   Megjegyezzük, hogy (3.10) fennáll. Az $F(\mathbf{x})$ értéke, mely tetszőlegesen közel van a szuprémumhoz, megkapható az $\mathbf{u} = (-\epsilon \cdot sgn(b_{12} + b_{21}), 1)$ vektort véve, ahol $\epsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi. Ekkor $\mathbf{x}_2 = \mathbf{u}_2 = 1$ és $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 = b_{11}\mathbf{u}_1 + b_{12}\mathbf{u}_2 = \epsilon \cdot a_{11}^{-1} \cdot sgn(a_{12} - a_{21}) - a_{11}^{-1}a_{12}$.

Majd tegyük fel, hogy: $A \in \mathcal{P}$.

1. eset: $|a_{12}| > |a_{21}|$. Ekkor három alesetet különböztetünk meg:

   (a) $a_{12} > 0 \geq a_{21}, a_{12} + a_{21} > 0$. Legyen $\mathbf{x}_2 = 1$, ekkor a következőket kapjuk:
   $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0 \Longrightarrow \mathbf{x}_1 < 0 \Longrightarrow \mathbf{x}_2\mathbf{y}_2 = a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22} > 0$
   $\Longrightarrow \mathbf{x}_1\mathbf{y}_1 < 0 \Longrightarrow \mathbf{y}_1 > 0 \Longrightarrow -a_{12}/a_{11} < \mathbf{x}_1 < 0.$
   Most
   $\bar{F}(\mathbf{x}_1) = -1 + \frac{-a_{11}\mathbf{x}_1^2 - a_{12}\mathbf{x}_1}{a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22}}$

   $\bar{F}'(\mathbf{x}_1) = \frac{-a_{11}a_{21}\mathbf{x}_1^2 - 2a_{11}a_{22}\mathbf{x}_1 - a_{12}a_{22}}{(a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22})^2}.$
   Könnyű megmutatni, hogy az $\bar{F}(\mathbf{x}_1)$ globális maximuma $\mathbf{x}_1 \in (-a_{12}/a_{11}, 0)$ esetén a következő:
   $\hat{\mathbf{x}_1} = \frac{-a_{12}\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a_{11}}(\sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{\det A})}$
   (Ez a kifejezés abban az esetben is érvényes, mikor $a_{21} = 0$.)
   Egyszerű számítás után megkapható (3.9).

   (b) $a_{12} < 0 \leq a_{21}, a_{12} + a_{21} < 0$. Ez az eset visszavezethető (a)-ra úgy, hogy definiáljuk a következőket:
   $\mathbf{u} = (-\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \mathbf{v} = (-\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), B = DAD$, ahol $D = diag(-1, 1)$.

   (c) $a_{12}a_{21} > 0, |a_{12}| > |a_{21}|$. Ez az eset visszavezethető (a)-(b)-re úgy, hogy definiáljuk a következőket:
   $\mathbf{u} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2), \mathbf{v} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2), B = \mathscr{P}_1 A$. Az $F(\mathbf{x})$ szuprémuma elérhető a következőket véve:
   $\mathbf{u} = (-b_{12}\sqrt{b_{22}}, \sqrt{b_{11}}(\sqrt{b_{11}b_{22}} + \sqrt{\det B})) =$
   $= a_{11}^{-3/2}(a_{12}\sqrt{\det A}, \sqrt{a_{11}a_{22}} + \sqrt{\det A}),$
   $\mathbf{x}_2 = \mathbf{u}_2$ és
   $x\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 = b_{11}\mathbf{u}_1 + b_{12}\mathbf{u}_2 = -a_{11}^{-2}a_{12}\sqrt{a_{22}}.$

2. eset: $a_{12}a_{21} > 0, |a_{12}| < |a_{21}|$. Ez az eset visszavezethető az 1. esetre úgy, hogy definiáljuk a következőket:
   $\mathbf{u} = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1), \mathbf{v} = (\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1), B = \mathscr{C}_{12}A.$

$\blacksquare$

**3.3.4. Megjegyzés.** *A 3.3.9. Tétel-ből következik, hogy $A \in SU \bigcap \mathbb{R}^{2\times 2}$ esetén:*

*1.* $\widehat{\kappa}(A) = \widehat{\kappa}(A^T)$

*2.* $\widehat{\kappa}(A)$ *az A elemeiből álló folytonos függvény.*

**3.3.5. Megjegyzés.** *Ha $A \in \mathcal{P} \bigcap \mathbb{R}^{2\times 2}$, akkor az $F_A(\boldsymbol{x})$ nem szükségképpen konkáv az $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} < 0\}$ halmazon.*
*(Hogy ezt lássuk, legyen $a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 8, a_{21} = -1$. Ekkor $\partial^2 F_A(1, -1)/\partial^2 \boldsymbol{x}_2^2 > 0$.)*

# 4. fejezet

# Elégséges mátrixok meghatározása

A szakdolgozat legfőbb célja, hogy minél több elégséges mátrixot határozzunk meg. Így ezen fejezet keretei között a matematikai programozás egyik legkutatottabb területének, a lineáris komplementaritási feladatnak hatékony megoldhatóságát biztosító elégséges mátrixok felkutatása kerül előtérbe.
Először Väliaho eljárását MATLAB-ban beprogramozva végeztünk kísérleteket, kerestünk elégséges mátrixokat. Majd az ismert $(2 \times 2)$-es mátrixok esetén fennálló szabályokat próbáltuk kiterjeszteni $(3 \times 3)$-as mátrixokra. Végül pozitív szemidefinit mátrixokhoz közeli elégséges mátrixokat határoztunk meg ismert definíciók és tételek segítségével.

## 4.1. Väliaho teszt

Väliaho által kifejlesztett rekurzív algoritmust beprogramozva tetszőleges, különböző méretű mátrixokat teszteltünk, vajon rendelkeznek-e az elégségesség tulajdonságával. Sajnos ez az algoritmus nem hatékony, és azt tapasztaltuk, hogy a sok kísérlet közül csak néhány esetén jutottunk elégséges mátrixokhoz.

Väliaho teszt - S1

```
function eleg = f( A )
B = A;
k = size(A,1);
K = true( 1, k );
debug = false;
if ( debug )
    k
end
eleg = step2( B, k, K, debug );
return
```

## Väliaho teszt - S2

```
function s = step2( B, k, K, debug )

eps = 10e-8;

if ( not( isequal( not( and( B( K, K ) < eps*ones(k), B(K,K) > -eps*ones(k) ) ), zeros(k) ) ) )
    if ( debug )
        fprintf('step3\n');
    end
    s = step3( B, k, K, debug );
    return
else
    if ( k >= 2 )
        s = true;
        return
    else
        if ( k == 1 )
            oszlop = B( : , K );
            sor = B( K, : );
            for i=1:size(B,1);
                if ( K(i) )
                    continue
                end

                if ( and( or(oszlop(i,1) > eps, oszlop(i,1) < -eps), oszlop(i,1)*sor(1,i) >= 0 ) )
                    s = false;
                    return
                end
            end

            s = true;
            return
        end
    end
end
```

## Väliaho teszt - S3

```
function s = step3( B, k, K, debug )

eps = 10e-8;

if ( k > 1 )
    if ( debug )
        fprintf('step4\n');
    end
    s = step4( B, k, K, debug );
    return
elseif ( k == 1)
    if ( B(K,K) > eps )
        s=true;
        return
    else
        s = false;
        return
    end
end
```

```
function s = step4( B, k, K, debug )

eps = 10e-8;

v = 0;
for i=1:size(B,1)
    if ( and( or(B(i,i) < -eps, B(i,i) > eps), K(i) == true ) )
            if ( B(i,i) < -eps )
                s = false;
                return
            elseif ( B(i,i) > eps )
                elem = B(i,i);
                B(i, : ) = B(i, :)/ elem;
                B(:, i ) = -B(:, i)/elem;
                B(i,i) = -B(i,i);

                for j=1:size(B,1) % sor indexe
                    if ( j == i )
                        continue
                    end
                    for l=1:size(B,2) % oszlop indexe
                        if ( l == i )
                            continue
                        end
                        B(j,l) = B(j,l) + B(i,l)*B(j,i)*elem;
                    end
                end

                K(i) = false;
                k = k-1;

                if ( debug )
                    k
                    i
                    B
                    fprintf('step2\n');
                end
            s = step2( B, k, K, debug );
            return
        end
        v = 1;
    end
end

if ( v == 0 )
    if ( debug )
        fprintf('step5\n');
    end
    s = step5( B, k, K, debug );
    return
end

end
```

```
function s = step5( B, k, K, debug )

eps = 10e-8;

if ( k == 2 )
    if ( det(B( K, K ) ) > eps )
        s = true;
        return
    end
elseif ( k > 2 )
    for i=1:size(B,1)
        if ( K(i) == false )
            continue
        end
        for j=1:size(B,2)
            if ( K(j) == false )
                continue
            end
            if ( and( B(i,j) > -eps, B(i,j) < eps ) )
                continue
            end

            L = false( 1, size(B,1) );
            L(i) = true;
            L(j) = true;

            M = true( 1, size(B,1) );
            M(i) = false;
            M(j) = false;

            pivot = B( L, L);
            sorok = B( L, M);
            oszlopok = B( M, L);
            maradek = B(M,M);

            maradek = maradek - oszlopok * ( pivot \ sorok );
            sorok = pivot \ sorok;
            oszlopok = - oszlopok / pivot;
            pivot = inv( pivot );

            B( L, L ) = pivot;
            B( L, M ) = sorok;
            B( M, L ) = oszlopok;
            B( M, M ) = maradek;

            K(i) = false;
            K(j) = false;

            k = k-2;

            if ( debug )
                k
                fprintf('step2\n');
            end
            s = step2( B, k, K, debug );
            return
        end
    end
end
```

Elégséges mátrix

```
function eleg = elegsegesmatrix(A)

if ( f(A)==0 )
     eleg=0;
     return
else
    if (f(transpose(A))==1)
         eleg=1;
         return
    else
         eleg=0;
         return
    end
end
```

Väliaho teszt

```
function elegseges = valiaho (A)

for i = 1:size(A,1)
     c = combnk(1:size(A,1),i);
     for j = 1:size(c,1)
            if (elegsegesmatrix(A(c(j,:),c(j,:))) == 0)
                 fprintf('a␣kovetkezo␣indexu␣reszmatrix␣nem␣elegseges:\n')
                 c(j,:)
                 elegseges = 0;
                 return
            end
     end
end
elegseges = 1;
return
```

Az első öt függvényben a Väliaho teszt egyes lépéseit írtuk le. A következő függvény segítségével az oszlop elégségességen túl a sor elégségességet is ellenőriztük, mégpedig az $M^T$ mátrix segítségével. Végül az utolsó függvényben a rekurzió szerepel, mely szerint a mátrix minden diagonális részmátrixának elégségességét teszteljük.

## 4.2. $(3 \times 3)$-as elégséges mátrixok

Az előző fejezetekben már megemlítettük, hogy a $(2 \times 2)$-es mátrixok esetén ismert egy elégségességet garantáló szabály, miszerint, ha az $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ alakban írható fel, akkor ez a mátrix akkor és csak akkor elégséges, ha $(a, d \geq 0$ és $ad - bc \geq 0)$ vagy $(ad - bc = 0$ ( és $a = 0$ vagy $d = 0) \Rightarrow b = 0$ és $c = 0)$.
Ezt a szabályt szeretnénk kiterjeszteni $(3 \times 3)$-as mátrixokra is úgy, hogy a bal felső $(2 \times 2)$-es négyzetes részre egy elégséges mátrixot helyezünk, majd a többi elemet úgy választjuk meg, hogy a mátrix elégséges maradjon.

Az elégséges mátrixok definícióját, illetve azt a már megemlített lemmát, miszerint egy $M$ mátrix elégséges, ha minden $(n-1)$-ed rendű diagonális részmátrixa elégséges és $detM > 0$, felhasználva a következő elégséges mátrixokat kaptuk:

**4.2.1. Példa.** *Az* $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ *mátrix* $(a > 0)$ *oszlop elégségességét definíció szerint úgy ellenőrizzük, hogy belátjuk, nem létezik olyan* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ *vektor, melyre* $\boldsymbol{x}(M_1\boldsymbol{x}) \leq 0$ *teljesül.*

*Sor elégségességét hasonlóan, csak $M$ helyére $M^T$-at helyettesítve. Amennyiben mindkettő teljesül, a vizsgált $M_1$ mátrixot elégségesnek nevezzük.*
*Mivel*

$\boldsymbol{x}(M_1\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \\ \boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \\ a\boldsymbol{x}_3^2 \end{bmatrix}$ *, így $M_1$ mátrix oszlop elégséges, és*

$\boldsymbol{x}(M_1^T\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \\ \boldsymbol{x}_2(-\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \\ a\boldsymbol{x}_3^2 \end{bmatrix}$*, így $M_1$ sor elégséges is.*

*Tehát az $M_1$ mátrix elégséges.*
*Ezt ellenőrizve felhasználjuk a fent említett lemmát, azaz megvizsgáljuk a mátrix összes $(n-1)$-ed rendű diagonális részmátrixát:*

$A_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $A_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

*mind elégséges, mivel teljesül a $(2 \times 2)$-es esetben fennálló szabály.*
*Továbbá $det(M_1) = a + a = 2a > 0$.*

*Végül próbálgatással meghatározunk egy $\boldsymbol{x}$ vektort, melynek segítségével alsó becslést adunk a vizsgált mátrix szükséges kappájára.*

*Legyen* $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. *Ekkor* $M_1\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2a \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}(M_1\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 4a \end{bmatrix}$.

*Ebből definíció szerint $I_+(\boldsymbol{x}) = \{i|\boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i > 0\} = \{2,3\}$, mivel $a > 0$ és $I_-(\boldsymbol{x}) = \{i|\boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i < 0\} = \{1\}$.*

*Tehát az $(1+4\kappa)\sum\limits_{i\in I_+(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i + \sum\limits_{i\in I_-(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i \geq 0$ egyenlőtlenségből a következő becslés adódik:*

$$(1+4\kappa)(6+4a) - 1 \geq 0$$

$$\kappa \geq \frac{-5-4a}{24+16a}$$

A következő mátrixoknál is hasonlóan jártunk el:

**4.2.2. Példa.** $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ a & 0 & c \end{bmatrix}$, *ahol $a, b, c > 0$.*

*Amennyiben $b > 2$, az* $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ *választással*
*$\kappa \geq \frac{3b-7-a-c}{4(1+a+c)}$ adódik és $3b - a - c - 7 \geq 0$ kell, hogy teljesüljön $\kappa$ definíciója miatt.*

**4.2.3. Példa.** $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *ahol* $a, b > 0$.

*Ebben az esetben az* $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *választással*

$\kappa \geq \frac{2b-4}{12}$ *adódik. Amiből látható, hogy* $b \longrightarrow \infty$ *esetén* $\kappa \longrightarrow \infty$.

**4.2.4. Példa.** $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \end{bmatrix}$, *ahol* $a, b, c > 0$.

*Ebben az esetben az* $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *választással*

$\kappa \geq \frac{3b-3a-9c-5}{4(4+3a+9c)}$ *adódik, és* $3b - 3a - 9c - 5 \geq 0$ *kell, hogy teljesüljön* $\kappa$ *definíciója miatt.*

## 4.3. PSD közeli elégséges mátrixok

Ezen fejezetben pozitív szemidefinit mátrixokhoz közeli elégséges mátrixokat szeretnénk meghatározni egy diagonálison kívüli elemük egy $\lambda$ számmal való megváltoztatásával.
Ez azért fontos számunkra, mivel pozitív szemidefinit mátrixokat egyszerűen és gyorsan tudunk megadni a következő tétel miatt:

**4.3.1. Tétel.** *Legyen* $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. *Ekkor az* $AA^T$, *illetve az* $A^TA$ *mátrix pozitív szemidefinit mátrix, ha* $rank(A) = m$.

Amennyiben a kapott változtatással elégséges mátrixhoz jutunk, egy megfelelő $\mathbf{x}$ vektor segítségével alsó becslést, egy közelítést tudunk adni $\hat{\kappa}$-ra, azaz a mátrix szükséges kappájára.

$$\kappa \geq -\frac{1}{4} \frac{\sum\limits_{i} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i}{\sum\limits_{i \in I_+(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i}$$

ahol $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ és $I_+(\mathbf{x}) = \{i | \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i > 0\}$
Egy adott mátrix elégségességét úgy ellenőrizzük, hogy először megmutatjuk, $\mathcal{P}_0$ -beli, majd a Väliaho tesztet alkalmazzuk rá.
Megjegyezzük, hogy a következő példák esetén a megváltoztatott elemek megfelelő megválasztása fontos, hiszen a $\lambda_i$ számokra kapott egyenletrendszer megoldása nehéz harmadrendűnél nagyobb egyenletek esetén.

**4.3.1. Példa.** *Adott egy* $A = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69 & 74 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ *szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix.*

*Az A mátrix egy diagonálison kívüli elemét egy* $\lambda$ *számmal megváltoztatva szeretnénk elégséges mátrixhoz jutni.*

$$A(\lambda) = A + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69 & 74 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 2+\lambda & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

*KÉRDÉS: Milyen $\lambda$ esetén lesz $A(\lambda)$ $\mathcal{P}_0$ mátrix?*
*Ehhez definíció szerint meg kell mutatnunk, hogy minden főminorja nemnegatív, azaz $2^4$ darab determinánst kell kiszámolnunk.*

1. *nulladrendű főminor: nullmátrix, melynek determinánsa* 0.
2. *elsőrendű főminorok: diagonálisbeli elemek, melyek pozitívak.*
3. *másodrendű főminorok:*

$$A_{1,2}(\lambda) = \begin{bmatrix} 65 & 69 \\ 69 & 74 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,2}(\lambda)) = 49 > 0$$

$$A_{1,3}(\lambda) = \begin{bmatrix} 65 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,3}(\lambda)) = 324 > 0$$

$$A_{1,4}(\lambda) = \begin{bmatrix} 65 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,4}(\lambda)) = 121 > 0$$

$$A_{2,3}(\lambda) = \begin{bmatrix} 74 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{2,3}(\lambda)) = 361 > 0$$

$$A_{2,4}(\lambda) = \begin{bmatrix} 74 & 2 \\ 2+\lambda & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{2,4}(\lambda)) = 148 - 4 - 2\lambda = 0 \; 144 - 2\lambda \geq 0 \Longrightarrow 144 \geq 2\lambda$$
$$\Longrightarrow 72 \geq \lambda$$

$$A_{3,4}(\lambda) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{3,4}(\lambda)) = 1 > 0$$

4. *harmadrendű főminorok:*

$$A_{1,2,3}(\lambda) = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 \\ 69 & 74 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,2,3}(\lambda)) = 0$$

$$A_{1,2,4}(\lambda) = \begin{bmatrix} 65 & 69 & 3 \\ 69 & 74 & 2 \\ 3 & 2+\lambda & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,2,4}(\lambda)) = 77\lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda \geq 0$$

$$A_{1,3,4}(\lambda) = \begin{bmatrix} 65 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,3,4}(\lambda)) = 0$$

$$A_{2,3,4}(\lambda) = \begin{bmatrix} 74 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \\ 2+\lambda & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{2,3,4}(\lambda)) = -19\lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda \leq 0$$

*5. negyedrendű főminor:*

$$A_{1,2,3,4}(\lambda) = A(\lambda) = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69 & 74 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 2+\lambda & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A(\lambda)) = -1235\lambda + 0 + 209\lambda + 1026\lambda = 0.$$

*Tehát, ha* $72 \geq \lambda$ *és* $\lambda \geq 0$ *és* $\lambda \leq 0$, *azaz ha* $\lambda = 0$, *akkor lesz* $A(\lambda)$ $\mathcal{P}_0$ *mátrix.*

*Most alkalmazzuk a vizsgált mátrixra a Väliaho tesztet, azaz megfelelő számban végezzünk pivotálásokat, amíg a [3.2.2. Lemma] 2. pontja nem teljesül.*

4.1. táblázat. 4.3.1. példa - másodrendű főminor

$A_{1,2} =$

| | |
|---|---|
| 65 | 69 |
| 69 | 74 |

$a, d \geq 0$ és $ad - bc = 49 \geq 0 \Longrightarrow$ elégséges

$A_{1,3} =$

| | |
|---|---|
| 65 | -1 |
| -1 | 5 |

$a, d \geq 0$ és $ad - bc = 324 \geq 0 \Longrightarrow$ elégséges

$A_{1,4} =$

| | |
|---|---|
| 65 | 3 |
| 3 | 2 |

$a, d \geq 0$ és $ad - bc = 121 \geq 0 \Longrightarrow$ elégséges

$A_{2,3} =$

| | |
|---|---|
| 74 | -3 |
| -3 | 5 |

$a, d \geq 0$ és $ad - bc = 361 \geq 0 \Longrightarrow$ elégséges

$A_{2,4} =$

| | |
|---|---|
| 74 | 2 |
| 2 | 2 |

$a, d \geq 0$ és $ad - bc = 144 \geq 0 \Longrightarrow$ elégséges

$A_{3,4} =$

| | |
|---|---|
| 5 | 3 |
| 3 | 2 |

$a, d \geq 0$ és $ad - bc = 1 \geq 0 \Longrightarrow$ elégséges

4.2. táblázat. 4.3.1. példa - harmadrendű főminor

$A_{1,2,3} =$

| | | |
|---|---|---|
| 65 | 69 | -1 |
| 69 | 74 | -3 |
| -1 | -3 | **5** |

| | | |
|---|---|---|
| 64,8 | 68,4 | 0 |
| 68,4 | 72,2 | 0 |
| -0,2 | -0,6 | 1 |

| | |
|---|---|
| 64,8 | 68,4 |
| 68,4 | **72,2** |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0,9473 | 1 |

| |
|---|
| 0 |

$A_{1,3,4} =$

| | | |
|---|---|---|
| 65 | -1 | 3 |
| -1 | 5 | 3 |
| 3 | 3 | **2** |

| | | |
|---|---|---|
| 60,5 | -5,5 | 0 |
| -5,5 | 0,5 | 0 |
| 1,5 | 1,5 | 1 |

| | |
|---|---|
| 60,5 | -5,5 |
| -5,5 | **0,5** |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -11 | 1 |

| |
|---|
| 0 |

$A_{1,2,4} =$

| | | |
|---|---|---|
| 65 | 69 | 3 |
| 69 | 74 | 2 |
| 3 | 2 | **2** |

| | | |
|---|---|---|
| 60,5 | 66 | 0 |
| 66 | 72 | 0 |
| 1,5 | 1 | 1 |

| | |
|---|---|
| 60,5 | 66 |
| 66 | **72** |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0,9166 | 1 |

| |
|---|
| 0 |

$A_{2,3,4} =$

| | | |
|---|---|---|
| 74 | -3 | 2 |
| -3 | 5 | 3 |
| 2 | 3 | **2** |

| | | |
|---|---|---|
| 72 | -6 | 0 |
| -6 | 0,5 | 0 |
| 1 | 1,5 | 1 |

| | |
|---|---|
| 72 | -6 |
| -6 | **0,5** |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -12 | 1 |

| |
|---|
| 0 |

4.3. táblázat. 4.3.1. példa negyedrendű főminor

$A =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 65 | 69 | -1 | 3 |
| 69 | 74 | -3 | 2 |
| -1 | -3 | 5 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | **2** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 60,5 | 66 | -5,5 | 0 |
| 66 | 72 | -6 | 0 |
| -5,5 | -6 | 0,5 | 0 |
| 1,5 | 1 | 1,5 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 60,5 | 66 | -5,5 |
| 66 | 72 | -6 |
| -5,5 | -6 | **0,5** |

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| -11 | -12 | 1 |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0 | 0 |

**4.3.2. Példa.** *Adott egy* $A = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69 & 74 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ *szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix. Az A mátrix három diagonálison kívüli elemét* $\lambda_1$, $\lambda_2$, *illetve* $\lambda_3$ *számokkal megváltoztatva szeretnénk elégséges mátrixhoz jutni.*

$$A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = A + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69+\lambda_1 & 74 & -3 & 2 \\ -1+\lambda_2 & -3 & 5 & 3 \\ 3+\lambda_3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

*KÉRDÉS: Milyen* $\lambda_1$, $\lambda_2$, *és* $\lambda_3$ *esetén lesz* $A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ $\mathcal{P}_0$ *mátrix?*
*Ehhez definíció szerint meg kell mutatnunk, hogy minden főminorja nemnegatív, azaz* $2^4$ *darab determinánst kell kiszámolnunk.*

1. *nulladrendű főminor: nullmátrix, melynek determinánsa* 0.

2. *elsőrendű főminorok: diagonálisbeli elemek, melyek pozitívak.*

3. *másodrendű főminorok:*

$$A_{1,2}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{bmatrix} 65 & 69 \\ 69+\lambda_1 & 74 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,2}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)) = 49 - 69\lambda_1 \geq 0 \Longrightarrow \tfrac{49}{69} \geq \lambda_1$$

$$A_{1,3}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{bmatrix} 65 & -1 \\ -1+\lambda_2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,3}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)) = 324 + \lambda_2 \geq 0 \Longrightarrow -324 \leq \lambda_2$$

$$A_{1,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{bmatrix} 65 & 3 \\ 3+\lambda_3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)) = 121 - 3\lambda_3 \geq 0 \Longrightarrow \tfrac{121}{3} \geq \lambda_3$$

$$A_{2,3}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{bmatrix} 74 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{2,3}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)) = 361 > 0$$

$$A_{2,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{bmatrix} 74 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{2,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)) = 144 > 0$$

$$A_{3,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{3,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)) = 1 > 0$$

4. *harmadrendű főminorok:*

$$A_{1,2,3}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 \\ 69+\lambda_1 & 74 & -3 \\ -1+\lambda_2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,2,3}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)) = -342\lambda_1 - 133\lambda_2 \geq 0$$

$$\Longrightarrow \tfrac{-342}{133}\lambda_1 \geq \lambda_2$$

$$A_{1,2,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{bmatrix} 65 & 69 & 3 \\ 69+\lambda_1 & 74 & 2 \\ 3+\lambda_3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,2,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)) = -132\lambda_1 - 84\lambda_3 \geq 0$$

$$\Longrightarrow \tfrac{-132}{84}\lambda_1 \geq \lambda_3$$

$$A_{1,3,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{bmatrix} 65 & -1 & 3 \\ -1+\lambda_2 & 5 & 3 \\ 3+\lambda_3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,3,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)) = 11\lambda_2 - 18\lambda_3 \geq 0$$

$$\Longrightarrow \tfrac{11}{18}\lambda_2 \geq \lambda_3$$

$$A_{2,3,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{bmatrix} 74 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{2,3,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)) = 0$$

*5. negyedrendű főminor:*

$$A_{1,2,3,4}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = A(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69+\lambda_1 & 74 & -3 & 2 \\ -1+\lambda_2 & -3 & 5 & 3 \\ 3+\lambda_3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)) =$$

$$0 - 69\lambda_1 - 828\lambda_2 + 1311\lambda_3 + 12\lambda_1 + 144\lambda_2 - 228\lambda_3 + 57\lambda_1 + 684\lambda_2 - 1083\lambda_3 = 0$$

*Tehát, ha*
$0,7101 \approx \frac{49}{69} \geq \lambda_1$
$-324 \leq \lambda_2$
$\frac{121}{3} \geq \lambda_3$
$-2,5714\lambda_1 \approx \frac{-342}{133}\lambda_1 \geq \lambda_2$
$-1,5714\lambda_1 \approx \frac{-132}{84}\lambda_1 \geq \lambda_3$
$0,611\lambda_2 \approx \frac{11}{18}\lambda_2 \geq \lambda_3$, *akkor a vizsgált* $A(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ *mátrix* $\mathcal{P}_0$ *mátrix.*
*Most legyen* $\lambda_1 = \frac{49}{69}$, $\lambda_2 = -\frac{342}{133}\lambda_1$, $\lambda_3 = -\frac{132}{84}\lambda_1$.

4.4. táblázat. 4.3.2. példa - másodrendű főminor

$A_{1,2} =$

| | |
|---|---|
| 65 | 69 |
| 69,71014 | 74 |

$a, d \geq 0$ és $ad - bc = 0$ $\geq 0$ $\Longrightarrow$ elégséges

$A_{1,3} =$

| | |
|---|---|
| 65 | -1 |
| -2,826087 | 5 |

$a, d \geq 0$ és $ad - bc = 322,1739$ $\geq 0$ $\Longrightarrow$ elégséges

$A_{1,4} =$

| | |
|---|---|
| 65 | 3 |
| 1,884058 | 2 |

$a, d \geq 0$ és $ad - bc = 124,3478$ $\geq 0$ $\Longrightarrow$ elégséges

$A_{2,3} =$

| | |
|---|---|
| 74 | -3 |
| -3 | 5 |

$a, d \geq 0$ és $ad - bc = 361$ $\geq 0$ $\Longrightarrow$ elégséges

$A_{2,4} =$

| | |
|---|---|
| 74 | 2 |
| 2 | 2 |

$a, d \geq 0$ és $ad - bc = 144$ $\geq 0$ $\Longrightarrow$ elégséges

$A_{3,4} =$

| | |
|---|---|
| 5 | 3 |
| 3 | 2 |

$a, d \geq 0$ és $ad - bc = 1$ $\geq 0$ $\Longrightarrow$ elégséges

4.5. táblázat. 4.3.2. példa - harmadrendű főminor

$A_{1,2,3} =$

| | | |
|---|---|---|
| 65 | 69 | -1 |
| 69,7101 | 74 | -3 |
| -2,8260 | -3 | **5** |

| | | |
|---|---|---|
| 64,4347 | 68,4 | 0 |
| 68,0144 | 72,2 | 0 |
| -0,5652 | -0,6 | 1 |

| | |
|---|---|
| 64,4347 | 68,4 |
| 68,0144 | **72,2** |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0,9420 | 1 |

| |
|---|
| 0 |

$A_{1,3,4} =$

| | | |
|---|---|---|
| 65 | -1 | 3 |
| -2,8260 | 5 | 3 |
| 1,8840 | 3 | **2** |

| | | |
|---|---|---|
| 62,1739 | -5,5 | 0 |
| -5,6521 | 0,5 | 0 |
| 0,9420 | 1,5 | 1 |

| | |
|---|---|
| 62,1739 | -5,5 |
| -5,6521 | **0,5** |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -11,3043 | 1 |

| |
|---|
| 0 |

$A_{1,2,4} =$

| | | |
|---|---|---|
| 65 | 69 | 3 |
| 69,7101 | 74 | 2 |
| 1,8840 | 2 | **2** |

| | | |
|---|---|---|
| 62,1739 | 66 | 0 |
| 67,8260 | 72 | 0 |
| 0,9420 | 1 | 1 |

| | |
|---|---|
| 62,1739 | 66 |
| 67,8260 | **72** |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0,9420 | 1 |

| |
|---|
| 0 |

$A_{2,3,4} =$

| | | |
|---|---|---|
| 74 | -3 | 2 |
| -3 | 5 | 3 |
| 2 | 3 | **2** |

| | | |
|---|---|---|
| 72 | -6 | 0 |
| -6 | 0,5 | 0 |
| 1 | 1,5 | 1 |

| | |
|---|---|
| 72 | -6 |
| -6 | **0,5** |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -12 | 1 |

| |
|---|
| 0 |

4.6. táblázat. 4.3.2. példa - negyedrendű főminor

$A =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 65 | 69 | -1 | 3 |
| 69,7101 | 74 | -3 | 2 |
| -2,8260 | -3 | 5 | 3 |
| 1,8840 | 2 | 3 | **2** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 62,1739 | 66 | -5,5 | 0 |
| 67,8260 | 72 | -6 | 0 |
| -5,6521 | -6 | 0,5 | 0 |
| 0,9420 | 1 | 1,5 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 62,1739 | 66 | -5,5 |
| 67,8260 | 72 | -6 |
| -5,6521 | -6 | **0,5** |

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| -11,3043 | -12 | 1 |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0 | 0 |

*Végül próbálgatással meghatározunk egy $\boldsymbol{x}$ vektort, melynek segítségével alsó becslést adunk a vizsgált mátrix szükséges kappájára.*

*Legyen* $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 98 \\ -97 \\ -58 \\ 86 \end{bmatrix}$. *Ekkor* $A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -7 \\ -0,4058 \\ -17,9565 \\ -11,3623 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}(A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -686 \\ 39,3623 \\ 1041,478 \\ -977,159 \end{bmatrix}$.

*Ebből definíció szerint* $I_+(\boldsymbol{x}) = \{i|\boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i > 0\} = \{2,3\}$, *és* $I_-(\boldsymbol{x}) = \{i|\boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i < 0\} = \{1,4\}$.

*Tehát az* $(1+4\kappa) \sum_{i \in I_+(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i + \sum_{i \in I_-(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{x}_i(M\boldsymbol{x})_i \geq 0$ *egyenlőtlenségből a következő becslés adódik:*

$$\kappa \geq 0,1347$$

**4.3.3. Példa.** *Adott egy* $A = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69 & 74 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ *szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix.*
*Az A mátrix három diagonálison kívüli elemét* $\lambda_1$ *és* $\lambda_2$ *számokkal megváltoztatva szeretnénk elégséges mátrixhoz jutni.*

$$A(\lambda_1, \lambda_2) = A + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69 & 74 & -3 & 2 \\ -1+\lambda_1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 2+\lambda_2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

*KÉRDÉS: Milyen* $\lambda_1$, $\lambda_2$ *esetén lesz* $A(\lambda_1, \lambda_2)$ $\mathcal{P}_0$ *mátrix?*
*Ehhez definíció szerint meg kell mutatnunk, hogy minden főminorja nemnegatív, azaz* $2^4$ *darab determinánst kell kiszámolnunk.*

1. *nulladrendű főminor: nullmátrix, melynek determinánsa* 0.

2. *elsőrendű főminorok: diagonálisbeli elemek, melyek pozitívak.*

3. *másodrendű főminorok:*
$$A_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 65 & 69 \\ 69 & 74 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2)) = 49 > 0$$
$$A_{1,3}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 65 & -1 \\ -1+\lambda_1 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,3}(\lambda_1, \lambda_2)) = 324 + \lambda_1 \geq 0 \Longrightarrow \lambda_1 \geq -324$$
$$A_{1,4}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 65 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,4}(\lambda_1, \lambda_2)) = 121 > 0$$
$$A_{2,3}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 74 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{2,3}(\lambda_1, \lambda_2)) = 361 > 0$$
$$A_{2,4}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 74 & 2 \\ 2+\lambda_2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{2,4}(\lambda_1, \lambda_2)) = 144 - 2\lambda_2 \geq 0 \Longrightarrow 72 \geq \lambda_2$$
$$A_{3,4}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{3,4}(\lambda_1, \lambda_2)) = 1 > 0$$

4. *harmadrendű főminorok:*
$$A_{1,2,3}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 \\ 69 & 74 & -3 \\ -1+\lambda_1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,2,3}(\lambda_1, \lambda_2)) = -133\lambda_1 \geq 0$$
$\Longrightarrow \lambda_1 \leq 0$
$$A_{1,2,4}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 65 & 69 & 3 \\ 69 & 74 & 2 \\ 3 & 2+\lambda_2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,2,4}(\lambda_1, \lambda_2)) = 77\lambda_2 \geq 0$$

$\Longrightarrow \lambda_2 \geq 0$

$$A_{1,3,4}(\lambda_1,\lambda_2) = \begin{bmatrix} 65 & -1 & 3 \\ -1+\lambda_1 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{1,3,4}(\lambda_1,\lambda_2)) = 11\lambda_1 \geq 0$$

$\Longrightarrow \lambda_1 \geq 0$

$$A_{2,3,4}(\lambda_1,\lambda_2) = \begin{bmatrix} 74 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \\ 2+\lambda_2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A_{2,3,4}(\lambda_1,\lambda_2)) = -19\lambda_2 \geq 0$$

$\Longrightarrow \lambda_2 \leq 0$

5. *negyedrendű főminor:*

$$A_{1,2,3,4}(\lambda_1,\lambda_2) = A(\lambda_1,\lambda_2) = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69 & 74 & -3 & 2 \\ -1+\lambda_1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 2+\lambda_2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow det(A(\lambda_1,\lambda_2)) =$$

$$-1235\lambda_2 - 828\lambda_1 + 144\lambda_1 + 209\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2 + 684\lambda_1 + 1026\lambda_2 + 9\lambda_1\lambda_2 \Longrightarrow 7\lambda_1\lambda_2 \geq 0$$

*Tehát, ha* $\lambda_1 \geq -324$, $72 \geq \lambda_2$, $\lambda_1 \leq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \leq 0$, $7\lambda_1\lambda_2 \geq 0$, *azaz, ha* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, *akkor a vizsgált* $A(\lambda_1,\lambda_2)$ *mátrix* $\mathcal{P}_0$ *mátrix.*

4.7. táblázat. 4.3.3. példa- másodrendű főminor

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_{1,2} =$ | $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 65 & 69 \\ \hline 69 & 74 \\ \hline\end{array}$ | $a,d \geq 0$ | és | $ad - bc = 49$ | $\geq 0$ | $\Longrightarrow$ elégséges |
| $A_{1,3} =$ | $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 65 & -1 \\ \hline -1 & 5 \\ \hline\end{array}$ | $a,d \geq 0$ | és | $ad - bc = 324$ | $\geq 0$ | $\Longrightarrow$ elégséges |
| $A_{1,4} =$ | $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 65 & 3 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline\end{array}$ | $a,d \geq 0$ | és | $ad - bc = 121$ | $\geq 0$ | $\Longrightarrow$ elégséges |
| $A_{2,3} =$ | $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 74 & -3 \\ \hline -3 & 5 \\ \hline\end{array}$ | $a,d \geq 0$ | és | $ad - bc = 361$ | $\geq 0$ | $\Longrightarrow$ elégséges |
| $A_{2,4} =$ | $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 74 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline\end{array}$ | $a,d \geq 0$ | és | $ad - bc = 144$ | $\geq 0$ | $\Longrightarrow$ elégséges |
| $A_{3,4} =$ | $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 5 & 3 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline\end{array}$ | $a,d \geq 0$ | és | $ad - bc = 1$ | $\geq 0$ | $\Longrightarrow$ elégséges |

4.8. táblázat. 4.3.3. példa - harmadrendű főminor

$A_{1,2,3} =$

| | | |
|---|---|---|
| 65 | 69 | -1 |
| 69 | 74 | -3 |
| -1 | -3 | **5** |

| | | |
|---|---|---|
| 64,8 | 68,4 | 0 |
| 68,4 | 72,2 | 0 |
| -0,2 | -0,6 | 1 |

| | |
|---|---|
| 64,8 | 68,4 |
| 68,4 | **72,2** |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0,9473 | 1 |

| |
|---|
| 0 |

$A_{1,3,4} =$

| | | |
|---|---|---|
| 65 | -1 | 3 |
| -1 | 5 | 3 |
| 3 | 3 | **2** |

| | | |
|---|---|---|
| 60,5 | -5,5 | 0 |
| -5,5 | 0,5 | 0 |
| 1,5 | 1,5 | 1 |

| | |
|---|---|
| 60,5 | -5,5 |
| -5,5 | **0,5** |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -11 | 1 |

| |
|---|
| 0 |

$A_{1,2,4} =$

| | | |
|---|---|---|
| 65 | 69 | 3 |
| 69 | 74 | 2 |
| 3 | 2 | **2** |

| | | |
|---|---|---|
| 60,5 | 66 | 0 |
| 66 | 72 | 0 |
| 1,5 | 1 | 1 |

| | |
|---|---|
| 60,5 | 66 |
| 66 | **72** |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0,9166 | 1 |

| |
|---|
| 0 |

$A_{2,3,4} =$

| | | |
|---|---|---|
| 74 | -3 | 2 |
| -3 | 5 | 3 |
| 2 | 3 | **2** |

| | | |
|---|---|---|
| 72 | -6 | 0 |
| -6 | 0,5 | 0 |
| 1 | 1,5 | 1 |

| | |
|---|---|
| 72 | -6 |
| -6 | **0,5** |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -12 | 1 |

| |
|---|
| 0 |

4.9. táblázat. 4.3.3. példa - negyedrendű főminor

$A =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 65 | 69 | -1 | 3 |
| 69 | 74 | -3 | 2 |
| -1 | -3 | 5 | 3 |
| 3 | 2 | 3 | **2** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 60,5 | 66 | -5,5 | 0 |
| 66 | 72 | -6 | 0 |
| -5,5 | -6 | 0,5 | 0 |
| 1,5 | 1 | 1,5 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 60,5 | 66 | -5,5 |
| 66 | 72 | -6 |
| -5,5 | -6 | **0,5** |

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| -11 | -12 | 1 |

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0 | 0 |

# 5. fejezet

# Befejezés

A szakdolgozat fő témája az elégséges mátrixok tulajdonságainak vizsgálata, illetve ezen tulajdonsággal rendelkező mátrixok konstruálása különböző módszerekkel. A matematikai programozásban, illetve számos gyakorlati alkalmazásban nagyon fontos jelentőséggel bír ezen mátrixosztály, hiszen abban az esetben, ha a lineáris komplementaritási feladat (LCP) együttható mátrixa elégséges, rendelkezésünkre áll hatékony megoldó algoritmus. Sajnos, azonban ebben az esetben sem tudunk egy tetszőleges LCP feladatot polinom időben megoldani, ugyanis az elégségesség leellenőrzésére ezidáig csak Väliaho rekurzív algoritmusa létezik.

A szakdolgozat két fő részre bontható. Az elő részben a lineáris komplementaritási feladatokkal kapcsolatos, számunkra legfontosabb mátrixosztályokról (úgy, mint a $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_*(\kappa)$, $\mathcal{P}_*$, sor elégséges, oszlop elégséges, illetve elégséges mátrixok osztályáról) a már ismert eredményeket, tulajdonságokat gyűjtöttük össze. Kiemelkedő figyelmet fordítottunk a szakdolgozat címét is adó elégséges mátrixok megismerésére. Továbbá ezen területen jelentős eredményeket felsorakoztató Väliaho kiemelkedő cikkeinek feldolgozását tekintettük fontos feladatunknak.

A dolgozat második felében önálló eredményként különböző módszerekkel próbáltunk különböző méretű elégséges mátrixokat generálni a már meglévő definíciók és tételek segítségével. Elsőként Väliaho rekurzív eljárását MATLAB-ban beprogramozva végeztünk kísérleteket, kerestünk elégséges mátrixokat. Ezután $(3\times 3)$-as elégséges mátrixokat konstruáltunk úgy, hogy a bal felső $(2\times 2)$-es négyzetes részre egy elégséges mátrixot helyeztünk, a többi elemet pedig úgy választottuk meg, hogy elégségessége ne sérüljön. Végül pozitív szemidefinit mátrixokhoz közeli elégséges mátrixokat kerestünk tetszőleges diagonálison kívüli elemük megváltoztatásával.

A szakdolgozat megírása közben számos új ötlet merült fel elégséges mátrixok meghatározására, így nem felesleges ezen területen tovább kutatni, keresni az eddig megválaszolatlan kérdésekre adható válaszokat. Amennyiben létezne hatékony, polinom idejű módszer egy tetszőleges mátrix elégségességének ellenőrzésére, az LCP feladat számos gyakorlati alkalmazásában, mind a mérnöki, mind a gazdasági feladatokban is segítségünkre lehetne.

# Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Illés Tibor tanár úrnak segítségét, ösztönzését, illetve munkámban való támogatását.

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Eisenberg-Nagy Marianna tanárnőnek, aki megmutatta a lineáris komplementaritási feladat jelentőségét napjainkban, és aki segített az alapok megértésében.

Végül, de nem utolsó sorban köszönöm Molnár-Szipai Richárdnak önzetlen segítségét.

# Irodalomjegyzék


[1] R. W. Cottle. A field guide to matrix classes found in the linear complementarity problem. http://www.stanford.edu/dept/MSandE/people/emeriti/cottle/fieldguide3.PDF.

[2] M. Fiedler and V. Ptak. On matrices with non-positive off- diagonal elements and positive principal minors. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 12:382-400, 1962.

[3] Freud Róbert, *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös kiadó (2014.)

[4] A. Al-Nowaihi. P-matrices: An equivalent characterization. *Journal of Algebra*, 112:385-387, 1988.

[5] R. W. Cottle, J.-S. Pang, and R. E. Stone. *The Linear Complementarity Problem.* Computer Science and Scientific Computing. Academic Press, Inc., Boston, 1992.

[6] S. M. Guu. Sign reversing and matrix classes. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89(2):373-387, May 1996.

[7] G. S. R. Murty, T. Parthasarathy, and M. Sabatini. Lipschitzian Q-matrices are Pmatrices. *Mathematical Programming*, 74:55-58, 1996.

[8] G. S. R. Murty, T. Parthasarathy, and B. Sriparna. Constructive characterization of Lipschitzian $Q_0$-matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 252:323-337, 1997.

[9] M. Kojima, N. Megiddo, T. Noma, and A. Yoshise. A *Unified Approach to Interior Point Algorithms for Linear Complementarity Problems*, volume 538 of *Lecture Notes in Computer Science.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[10] R. W. Cottle, J. S. Pang, and V. Wenkateswaran. Sufficient matrices and the linear complementarity problem. *Linear Algebra and its Applications*, 114/115:231-249, 1989.

[11] S. M. Guu and R. W. Cottle. On a subclass of $P_0$. *Linear Algebra and Its Applications*, 223/224:325-335, 1995.

[12] H. Väliaho. $P_*$ -matrices are just suficient. *Linear Algebra and Its Applications*, 239:103-108, 1996.

[13] R.W. Cottle and S.-M. Guu, *Two characterizations of sufficient matrices*, *Linear Algebra Appl.* 170:65-74 (1992).

[14] T.D. Parsons, *Applications of principal pivoting, in Proceedins of the Princeton Symposium on Mathematical Programming.* (1970), pp. 567-581.

[15] G. Marsaglia and G. P. H. Styan, Equalities and inequalities for ranks of matrices, *Linear and Multilinear Algebra* 2:269-292 (1974).

[16] R.W. Cottle. *Nonlinear programs with positively bounded Jacobians.* PhD thesis, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, 1964.

[17] H. Väliaho. Criteria for sufficient matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 233:109-129, 1996.

[18] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol. 1, Chelsea, New York, 1959, p. 46.