Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Kar

SZAKDOLGOZAT

ELÉGSÉGES MÁTRIXOK

Témavezető
Dr. Illés Tibor

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Részletes áttekintést adunk egyrészt azon mátrixosztályokról, melyek valamilyen szép tulajdonsággal rendelkeznek a lineáris komplementaritási feladattal (LCP) kapcsolatban, másrészt elemezzük az elégséges mátrixok osztályát. A lineáris komplementaritási feladat a következő:
keressük azon $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ vektorokat, melyekre

$$\left.\begin{aligned} -M\mathbf{x} + \mathbf{s} &= \mathbf{q} \\ \mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \circ \mathbf{s} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \quad (LCP)$$

teljesül, ahol $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ és $(\mathbf{x} \circ \mathbf{s})$ a vektorok Hadamard-szorzata, mely a koordinátánkénti szorzást jelenti.
Az LCP-feladat fontossága:

1. Mind a mai napig intenzíven kutatott területe a matematikai programozásnak.
2. Számos könyvet és számos cikket publikáltak az LCP témakörében.
3. Az elméleti eredmények mellett széles körű és fontos gyakorlati alkalmazásai vannak a mérnöki és gazdasági feladatokban is egyaránt.

Tartalomjegyzék

Mátrixosztályok

$\mathcal{P}$ mátrixok

1962-ben Fiedler és Ptak az LCP-től függetlenül definiálták a $\mathcal{P}$ mátrixok osztályát. Később azonban Cottle tanulmányában megismertette az LCP problémák és a $\mathcal{P}$ mátrixosztály között fennálló kapcsolatot.

Definíció

Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot $\mathcal{P}$ mátrixnak nevezünk, ha minden főminorja pozitív.

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,9 \\ -10 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrixosztályok

$\mathcal{P}$ mátrixok

Fontos tulajdonságaik:
Az adott $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak a következő tulajdonságai ekvivalensek:

1. $M \in \mathcal{P}$
2. Minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra létezik egy i index, amelyre teljesül a következő: $\mathbf{x}_i(M\mathbf{x})_i > \mathbf{0}$. Átfogalmazva: Ha $\forall i$-re teljesül, hogy $\mathbf{x}_i(M\mathbf{x})_i \leq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. Minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorhoz létezik egy D_x pozitív diagonális mátrix, melyre a következő teljesül: $\mathbf{x}^T D_x M\mathbf{x} > \mathbf{0}$.
4. Minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorhoz létezik egy H_x nemnegatív diagonális mátrix, amelyre teljesül a következő: $\mathbf{x}^T H_x M\mathbf{x} > \mathbf{0}$.
5. Az M mátrix minden valós sajátértéke pozitív. (Valamint ugyan ez teljesül az M mátrix diagonális részmátrixára is.)
6. $M^{-1} \in \mathcal{P}$
7. M minden diagonális részmátrixa is $\mathcal{P}$-beli.

Mátrixosztályok

$\mathcal{P}_0$ mátrixok

A $\mathcal{P}$ mátrixosztály egy általánosított osztálya, a $\mathcal{P}_0$ mátrixosztály. Fontos tulajdonsága, hogy Fiedler és Ptak ezen mátrix osztályt úgy definiálták, mint a pozitív szemidefinit mátrixok általánosítása.

Definíció

Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot $\mathcal{P}_0$ mátrixnak nevezzünk, ha minden főminorja nemnegatív.

Példa

$$A = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ -31 & 74 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Mátrixosztályok

$\mathcal{P}_0$ mátrixok

Fontos tulajdonságaik:
Egy adott M mátrix következő tulajdonságai ekvivalensek:

1. $M \in \mathcal{P}_0$
2. Minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén létezik egy i index, melyre $\mathbf{x}_i \neq 0$ és $\mathbf{x}_i(M\mathbf{x})_i \geq 0$.
3. Minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén létezik egy H_x nemnegatív diagonális mátrix, melyre $\mathbf{x}^T H_x \mathbf{x} > 0$ és $\mathbf{x}^T H_x M \mathbf{x} \geq 0$.
4. Minden valós sajátértéke M-nek, valamint a diagonális részmátrixnak nemnegatív.
5. $I - \Lambda + \Lambda M \in \mathcal{P}_0$ minden Λ diagonális mátrixra, melyre $(0 \leq \Lambda \leq I)$.

Mátrixosztályok

$\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrixok

A $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrixokat 1991-ben Kojima definiálta, mint a pozitív szemidefinit mátrixok általánosításai. Ez egy kiemelkedő eredmény, hiszen ez a legbővebb olyan mátrix osztály, amelyben a belső pontos algoritmusok polinomálisak, habár a komplexitás függ a κ paraméter értékétől.

Definíció

Legyen $\kappa > 0$ egy nemnegatív szám. Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrixnak hívunk, ha

$$(1 + 4\kappa) \sum_{i \in I_+(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i (M\mathbf{x})_i + \sum_{i \in I_-(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i (M\mathbf{x})_i \geq 0$$

minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén, ahol

$$I_+(\mathbf{x}) = \{1 \leq i \leq n : \mathbf{x}_i (M\mathbf{x})_i > 0\}$$

és

$$I_-(\mathbf{x}) = \{1 \leq i \leq n : \mathbf{x}_i (M\mathbf{x})_i < 0\}$$

Mátrixosztályok

$\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrixok

Megfigyelhető, hogy $\kappa = 0$ esetén pont a pozitív szemidefinit mátrix osztályt kapjuk.

Létezik egy olyan legkisebb κ szám, melyre az M mátrix $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrix osztálybeli. Jelölje ezt a számot $\hat{\kappa}(M)$, melynek neve az M mátrix szükséges kappája. Mely elnevezés a $\hat{\kappa}(M)$ definíciójából adódik.

$$\hat{\kappa}(M) \geq \kappa_M(\mathbf{x}) := -\frac{1}{4}\frac{\mathbf{x}^T M\mathbf{x}}{\sum\limits_{i\in I_+(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i(M\mathbf{x})_i}$$

Ez egy alsó korlátja a bevezetett M mátrix szükséges kappájának, amely egyértelműen következik a $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrixok definíciójából bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén, melyre $\mathbf{x}^T M\mathbf{x} < 0$. Így $\hat{\kappa}(M)$-nek következő értékei lehetségesek:

$$\hat{\kappa}(M) = \begin{cases} 0 & ha\ M \in PSD \\ \frac{1}{4} sup\{\kappa_M(\mathbf{x}) : \mathbf{x}^T M\mathbf{x} < 0\} & k\ddot{u}l\ddot{o}nben \end{cases}$$

Mátrixosztályok

$\mathcal{P}_*$ mátrixok

Minden nemnegatív κ paraméterre az előzőekben bemutatott $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrixok uniója adja meg a $\mathcal{P}_*$ mátrix osztályt.

Definíció

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot $\mathcal{P}_*$ mátrixnak nevezzük, ha ez egy $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrix valamely $\kappa \geq 0$ esetén, azaz $P_* = \bigcup_{\kappa\geq 0} P_*(\kappa)$.

Mátrixosztályok

Elégséges mátrixok

Az elégséges mátrixoknak kitüntetett szerepük van az LCP megoldhatóságában. Hiszen tudjuk, ha a feladat M együttható mátrixa úgynevezett elégséges mátrix, akkor rendelkezésünkre áll hatékony megoldó algoritmus. Cottle, Pang és Venkateswaran definiálták először az elégséges mátrixokat. Úgy tekintünk ezen mátrixosztályra, mint a $\mathcal{P}$ és PSD mátrixok általánosításainak halmaza.

Definíció

Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot oszlop elégséges mátrixnak (Column Sufficient, CS) nevezünk, ha minden $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\boldsymbol{x}(M\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0}$ esetén $\boldsymbol{x}(M\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, és sor elégségesnek (Row Sufficient, RS) nevezünk, ha M^T oszlop elégséges.
Egy $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix elégséges, ha oszlop és sor elégséges is.

Minden $\mathcal{P}_*$ mátrix elégséges, mivel először Kojima a mátrix oszlop elégségességét bizonyította, majd Guu és Cottle azt is belátták, hogy ezen mátrixok sor elégségesek is. Az ellenkező irányú állítást Väliaho igazolta, így a $\mathcal{P}_*$ mátrix osztály megegyezik az elégséges mátrixok osztályával. Következésképp, minden, amit bebizonyítottunk a $\mathcal{P}_*$ osztályra, az teljesülni fog az elégséges mátrixok osztályára is, és minden eredmény az elégséges mátrixokról igaz lesz a $\mathcal{P}_*$ osztályra is.

Mátrixosztályok

Elégséges mátrixok

Az LCP elméletben ezen mátrixosztálynak lényeges szerepe van, mégpedig egy mátrix sor elégségessége a megoldások létezésével, míg oszlop elégségessége a megoldás halmazzal áll kapcsolatban. Főbb tulajdonságaik:

1. Legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sor (oszlop) elégséges mátrix. Ekkor M tetszőleges diagonális menti négyzetes részmátrixa is sor (oszlop) elégséges.
2. Egy M mátrix elégséges, ha minden $(n-1)$-edrendű diagonális részmátrixa elégséges és $\det M > 0$.
3. Ha egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak a determinánsa pozitív, $k < n$-ed rendben (sor, oszlop) elégséges, és inverze $(n-k)$-ad rendben (sor, oszlop) elégséges, akkor az adott mátrix is (sor, oszlop) elégséges.
4. Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix (sor, oszlop) elégséges, akkor $A \in \mathcal{P}_0$
5. Ha az $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrix $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ alakban írható fel, akkor ez a mátrix akkor és csak akkor elégséges, ha $(a, d \geq 0$ és $ad - bc \geq 0)$ vagy $(ad - bc = 0$ (és $a = 0$ vagy $d = 0) \Rightarrow b = 0$ és $c = 0)$.

Mátrixosztályok

Elégséges mátrixok

6. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, melyre $a_{kk} = 0$. Ekkor:
   1. Ha A oszlop elégséges, akkor $a_{ik} = 0$ vagy $a_{ik}a_{ki} < 0\ \forall i \neq k$ esetén.
   2. Ha A sor elégséges, akkor $a_{ki} = 0$ vagy $a_{ik}a_{ki} < 0\ \forall i \neq k$ esetén.
   3. Ha A elégséges, akkor $a_{ik} = a_{ki} = 0$ vagy $a_{ik}a_{ki} < 0\ \forall i \neq k$ esetén.
7. Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oszlop (sor) elégséges, és az A oszlopai (sorai) $i \in S$ lineárisan függetlenek, akkor az A sorai (oszlopai) $i \in S$ is lineárisan függetlenek.
   Ha A elégséges, akkor a sorai $i \in S$ lineárisan függetlenek, akkor és csak akkor, ha oszlopai $i \in S$ is.
8. Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, melyre $\det A > 0$ (sor, oszlop) elégséges k-ad rendben ($1 \leq k \leq n-1$) és A^{-1} (sor, oszlop) elégséges $(n-k)$-ad rendben, akkor A (sor, oszlop) elégséges.
9. Legyen az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix olyan, hogy diagonálisa nemnegatív. Ha $\det(A) > 0$, akkor A elégséges. Ha $\det(A) = 0$,akkor:
   1. A oszlop elégséges akkor és csak akkor, ha $a_{ii} = 0 \Rightarrow A_{*i} = 0, i = 1, 2$ esetén.
   2. A sor elégséges akkor és csak akkor, ha $a_{ii} = 0 \Rightarrow A_{i*} = 0, i = 1, 2$ esetén.
   3. A elégséges akkor és csak akkor, ha $a_{ii} = 0 \Rightarrow A_{*i} = 0 \text{és} A_{i*} = 0, i = 1, 2$ esetén.

Mátrixosztályok

Elégséges mátrixok szükséges kappájának meghatározása

Tétel

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix elégséges, akkor és csak akkor, ha létezik egy $\kappa \geq 0$ szám, melyre:

$$(1+4\kappa)\sum_{i\in I_+(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i + \sum_{i\in I_-(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i \geq 0 \tag{1}$$

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén, ahol $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ és $I_+(\boldsymbol{x}) = \{i|\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i > 0\}$ és $I_-(\boldsymbol{x}) = \{i|\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i < 0\}$.

Minél kisebb az (1)-ben választott κ szám, annál jobb az eljárás komplexitása. Így nagyon fontos, hogy megtaláljuk az (1)-et kielégítő legkisebb κ számot. Ezt az értéket nevezzük az elégséges A mátrix szükséges kappájának és $\hat{\kappa}(A)$-val jelöljük. Abban az esetben, ha $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, és $I_-(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ akkor $I_+(\mathbf{x}) \neq \emptyset$ és az arány a következő:

$$F_A(\mathbf{x}) := \frac{-\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\sum\limits_{i\in I_+(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i(A\mathbf{x})_i} \tag{2}$$

amely jól definiálható.

Mátrixosztályok

Elégséges mátrixok szükséges kappájának meghatározása

Így a következőt kapjuk az A mátrix szükséges kappájára:

$$\hat{\kappa}(A) := \begin{cases} 0 & ha\ A \in PSD \\ \frac{1}{4} sup\{F_A(\mathbf{x}) | \mathbf{x}^T A\mathbf{x} < 0\} & k\ddot{u}l\ddot{o}nben \end{cases}$$

Egy mátrix szükséges kappájának fontos tulajdonságai:

1. $\hat{\kappa}(DMD) = \hat{\kappa}(M)$ bármely D diagonális mátrixra, amelynek elemei nemnullák, és mérete megegyezik az M mátrix méretével.
2. $\hat{\kappa}(M) \geq \hat{\kappa}(\overline{M})$, M minden $\overline{M}$ diagonális részmátrixára.
3. Ha $M = diag(M_1, M_2)$, akkor $\hat{\kappa}(M) = max\{\hat{\kappa}(M_1), \hat{\kappa}(M_2)\}$.
4. Egy elégséges mátrix szükséges kappája megegyezik transzponáltjának szükséges kappájával, azaz, ha $M \in \mathcal{P}_*$, akkor $\hat{\kappa}(M^T) = \hat{\kappa}(M)$.
5. Legyen $A \in SU \bigcap \mathbb{R}^{n \times n}$, és legyen $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy nemnegatív diagonális mátrix. Ekkor $\widehat{\kappa}(A + D) \leq \widehat{\kappa}(A)$.
6. Legyen $A \in SU \bigcap \mathbb{R}^{n \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy nemnegatív diagonális mátrix, és legyen $A' = \begin{bmatrix} A & I \\ -I & D \end{bmatrix}$. Ekkor $\widehat{\kappa}(A') = \widehat{\kappa}(A)$.

Mátrixosztályok

Elégséges mátrixok szükséges kappájának meghatározása

Az egyes mátrixosztályok esetén Väliaho által meghatározott szükséges kappák kiszámítása:

Tétel

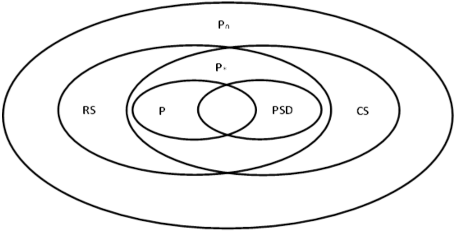
$M \in PSD \Rightarrow \hat{\kappa} = 0$ *(definíció szerint)*

$M \in \mathcal{P}_* \backslash PSD \Rightarrow 1 + 4\hat{\kappa} = \frac{max\{b^2, c^2\}}{(\sqrt{ad} + \sqrt{ad - bc})^2}$

$M \in \mathcal{P}_* \backslash (\mathcal{P} \cup PSD) \Rightarrow 1 + 4\hat{\kappa} = max\{|\frac{b}{c}|, |\frac{c}{b}|\}.$

Mátrixosztályok

Az eddig vizsgált különböző mátrixosztályok egymáshoz viszonyított elhelyezkedése



1. ábra. A mátrix osztályok

Könnyen látható tehát, hogy a következő relációk állnak fent:
$PSD \subsetneq \mathcal{P}_* \subsetneq \mathcal{P}_0$, $PSD \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{P}_*$, $\mathcal{P}_*(0) \equiv PSD$.

Példa

1. $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *mátrix oszlop elégséges, de nem sor elégséges.*
2. $A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *mátrix sor elégséges, de nem oszlop elégséges.*

Mátrixosztályok

Väliaho teszt

Ezidáig egy mátrix elégségességének tesztelésére csak Väliaho által kifejlesztett rekurzív módszer (vajon az (n-1)-ed rendben oszlop (sor) elégséges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, oszlop (sor) elégséges-e)létezik, mely polinomiális. Az eljárás a következő:

1. S1: Legyen $B = A$, $k = n$, $K = N$.
2. S2: Ha $B_{KK} \neq 0$, menjünk S3-ra.
   Ha $k \geq 2$, álljunk meg, A oszlop (sor) elégséges.
   Ha $k = 1$, álljunk meg, legyen $K = \{h\}$, A oszlop (sor) elégséges akkor és csak akkor, ha $b_{ih} = 0$ ($b_{hi} = 0$) vagy $b_{ih}b_{hi} < 0$ $\forall i \in N - h$ esetén.
3. S3: Ha $k > 1$, menjünk S4-re.
   Ha $k = 1$, álljunk meg, legyen $K = \{h\}$, A oszlop (sor) elégséges akkor és csak akkor, ha $b_{hh} > 0$.
4. S4: Ha B_{KK}-nak a diagonálisa 0, akkor menjünk S5-re. Különben válasszunk olyan $i \in K$ elemet, melyre $b_{ii} > 0$, legyen $B \leftarrow \mathscr{P}_i B$, $K \leftarrow K - i$, $k \leftarrow k - 1$, és menjünk S2-re.
5. S5: Ha $k = 1$, álljunk meg, A oszlop (sor) elégséges akkor és csak akkor, ha $\det(B_{KK}) > 0$.
   Ha $k > 2$, válasszunk egy $(i, j) \in K \times K$ párt, melyre $b_{ij} \neq 0$,
   legyen $B \leftarrow \mathscr{P}_{\{i,j\}} B$, $K \leftarrow K \backslash \{i, j\}$, $k \leftarrow k - 2$, és menjünk S2-re.

Tartalomjegyzék

Elégséges mátrixok meghatározása különböző módszerekkel

Väliaho teszt

Väliaho által kifejlesztett rekurzív algoritmust beprogramozva tetszőleges, különböző méretű mátrixokat teszteltünk, vajon rendelkeznek-e az elégségesség tulajdonságával. Az 50 tetszőleges, illetve 50 nemnegatív (15×15)-ös mátrix vizsgálatakor azt tapasztaltuk, hogy az algoritmus nem hatékony, és a sok kísérlet közül csak néhány esetén jutottunk elégséges mátrixokhoz.

Elégséges mátrixok meghatározása különböző módszerekkel

(3×3)-as elégséges mátrixok

A már megemlített (2×2)-es mátrixok esetén fennálló szabályt szeretnénk kiterjeszteni (3×3)-as mátrixokra is úgy, hogy a bal felső (2×2)-es négyzetes részre egy elégséges mátrixot helyezünk, majd a többi elemet úgy választjuk meg, hogy a mátrix elégséges maradjon.
Az elégséges mátrixok definícióját, illetve azt a már megemlített lemmát, miszerint egy M mátrix elégséges, ha minden $(n-1)$-ed rendű diagonális részmátrixa elégséges és $det(M) > 0$, felhasználva a következő elégséges mátrixokat kaptuk:

Elégséges mátrixok meghatározása különböző módszerekkel

(3×3)-as elégséges mátrixok

PÉLDA:

Az $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ mátrix ($a > 0$) oszlop elégségességét definíció szerint úgy ellenőrizzük, hogy belátjuk, nem létezik olyan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ vektor, melyre $\mathbf{x}(M_1\mathbf{x}) \leq 0$ teljesül.

Sor elégségességét hasonlóan, csak M helyére M^T-at helyettesítve. Amennyiben mindkettő teljesül, a vizsgált M_1 mátrixot elégségesnek nevezzük.

Mivel

$\mathbf{x}(M_1\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{x}_2(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \\ a\mathbf{x}_3^2 \end{bmatrix}$, így M_1 mátrix oszlop elégséges, és

$\mathbf{x}(M_1^T\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{x}_2(-\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \\ a\mathbf{x}_3^2 \end{bmatrix}$, így M_1 sor elégséges is.

Tehát az M_1 mátrix elégséges.

Elégséges mátrixok meghatározása különböző módszerekkel

(3 × 3)-as elégséges mátrixok

Ezt ellenőrizve felhasználjuk a fent említett lemmát, azaz megvizsgáljuk a mátrix összes $(n-1)$-ed rendű diagonális részmátrixát:
$A_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $A_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$
mind elégséges, mivel teljesül a (2×2)-es esetben fennálló szabály.
Továbbá $det(M_1) = a + a = 2a > 0$.
Végül próbálgatással meghatározunk egy $\mathbf{x}$ vektort, melynek segítségével alsó becslést adunk a vizsgált mátrix szükséges kappájára.

Legyen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Ekkor $M_1\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2a \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(M_1\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 4a \end{bmatrix}$.

Ebből definíció szerint $I_+(\mathbf{x}) = \{i | \mathbf{x}_i(M\mathbf{x})_i > 0\} = \{2, 3\}$, mivel $a > 0$ és $I_-(\mathbf{x}) = \{i | \mathbf{x}_i(M\mathbf{x})_i < 0\} = \{1\}$.
Tehát az $(1 + 4\kappa) \sum\limits_{i \in I_+(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i(M\mathbf{x})_i + \sum\limits_{i \in I_-(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i(M\mathbf{x})_i \geq 0$
egyenlőtlenségből a következő becslés adódik:

$$(1 + 4\kappa)(6 + 4a) - 1 \geq 0$$

$$\kappa \geq \frac{-5 - 4a}{24 + 16a}$$

Elégséges mátrixok meghatározása különböző módszerekkel

(3×3)-as elégséges mátrixok

A következő mátrixoknál is hasonlóan jártunk el:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ a & 0 & c \end{bmatrix}, \text{ ahol } a, b, c > 0.$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ahol } a, b > 0.$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \end{bmatrix}, \text{ ahol } a, b, c > 0.$$

Elégséges mátrixok meghatározása különböző módszerekkel

PSD közeli elégséges mátrixok

Pozitív szemidefinit mátrixokhoz közeli elégséges mátrixokat szeretnénk meghatározni egy diagonálison kívüli elemük egy λ számmal való megváltoztatásával.
Ez azért fontos számunkra, mivel pozitív szemidefinit mátrixokat egyszerűen és gyorsan tudunk megadni a következő tétel miatt:

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Ekkor az AA^T, illetve az $A^T A$ mátrix pozitív szemidefinit mátrix, ha $rank(A) = m$.

Amennyiben a kapott változtatással elégséges mátrixhoz jutunk, egy megfelelő **x** vektor segítségével alsó becslést, egy közelítést tudunk adni $\hat{\kappa}$-ra, azaz a mátrix szükséges kappájára.

$$\kappa \geq -\frac{1}{4} \frac{\sum\limits_{i} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i}{\sum\limits_{i \in I_+(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i}$$

ahol $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ és $I_+(\mathbf{x}) = \{i | \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i > 0\}$

Elégséges mátrixok meghatározása különböző módszerekkel

PSD közeli elégséges mátrixok

Egy adott mátrix elégségességét úgy ellenőrizzük, hogy először megmutatjuk, $\mathcal{P}_0$ -beli, majd a Väliaho tesztet alkalmazzuk rá.
Megjegyezzük, hogy a következő példák esetén a megváltoztatott elemek megfelelő megválasztása fontos, hiszen a λ_i számokra kapott egyenletrendszer megoldása nehéz harmadrendűnél nagyobb egyenletek esetén.

Elégséges mátrixok meghatározása különböző módszerekkel

PSD közeli elégséges mátrixok

PÉLDA:

Adott egy $A = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69 & 74 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix.

Az A mátrix három diagonálison kívüli elemét λ_1, λ_2, illetve λ_3 számokkal megváltoztatva szeretnénk elégséges mátrixhoz jutni.

$$A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = A + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69+\lambda_1 & 74 & -3 & 2 \\ -1+\lambda_2 & -3 & 5 & 3 \\ 3+\lambda_3 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

KÉRDÉS: Milyen λ_1, λ_2, és λ_3 esetén lesz $A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ $\mathcal{P}_0$ mátrix?

Ehhez definíció szerint meg kell mutatnunk, hogy minden főminorja nemnegatív, azaz 2^4 darab determinánst kell kiszámolnunk.

Elégséges mátrixok meghatározása különböző módszerekkel

PSD közeli elégséges mátrixok

A számításokból az alábbi egyenlőtlenségek adódtak:

$0,7101 \approx \frac{49}{69} \geq \lambda_1$

$-324 \leq \lambda_2$

$\frac{121}{3} \geq \lambda_3$

$-2,5714\lambda_1 \approx \frac{-342}{133}\lambda_1 \geq \lambda_2$

$-1,5714\lambda_1 \approx \frac{-132}{84}\lambda_1 \geq \lambda_3$

$0,611\lambda_2 \approx \frac{11}{18}\lambda_2 \geq \lambda_3$, akkor a vizsgált $A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ mátrix $\mathcal{P}_0$ mátrix.

Most legyen $\lambda_1 = \frac{49}{69}$, $\lambda_2 = -\frac{342}{133}\lambda_1$, $\lambda_3 = -\frac{132}{84}\lambda_1$.

Az így kapott mátrixra alkalmazzuk a Väliaho tesztet, azaz megfelelő számban végezzünk pivotálásokat, amíg nullmátrixot nem kapunk.

Elégséges mátrixok meghatározása különböző módszerekkel

PSD közeli elégséges mátrixok

Ebben az esetben a megfelelően megválasztott **x** vektor a következő:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 98 \\ -97 \\ -58 \\ 86 \end{bmatrix}$$

Ennek segítségével alsó becslést adunk a mátrix szükséges kappájára az

$$(1 + 4\kappa) \sum_{i \in I_+(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i (M\mathbf{x})_i + \sum_{i \in I_-(\mathbf{x})} \mathbf{x}_i (M\mathbf{x})_i \geq 0$$

egyenlőtlenséget felhasználva.

A kapott korlát a következő:

$$\kappa \geq 0,1347$$

Elégséges mátrixok meghatározása különböző módszerekkel

PSD közeli elégséges mátrixok

A következő példák esetén is hasonlóan jártunk el, azonban csak $\lambda_i = 0$ $i = 1, 2$ esetén jutottunk $\mathcal{P}_0$ mátrixhoz.

1. $$A(\lambda) = A + \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69 & 74 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 2+\lambda & 3 & 2 \end{bmatrix}$$
2. $$A(\lambda_1, \lambda_2) = A + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 65 & 69 & -1 & 3 \\ 69 & 74 & -3 & 2 \\ -1+\lambda_1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 2+\lambda_2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Tartalomjegyzék

Befejezés

A szakdolgozat megírása közben számos új ötlet merült fel elégséges mátrixok meghatározására, így nem felesleges ezen területen tovább kutatni, keresni az eddig megválaszolatlan kérdésekre adható válaszokat. Amennyiben létezne hatékony, polinom idejű módszer egy tetszőleges mátrix elégségességének ellenőrzésére, az LCP feladat számos gyakorlati alkalmazásában, mind a mérnöki, mind a gazdasági feladatokban is segítségünkre lehetne.