Sztochasztikus folyamatok
1. feladatsor, 2017. február 8.

1. Kovácsék naponta olvassák az újságot, majd a szoba sarkában lévő újságkupac tetejére teszik a kiolvasott példányt. Esténként $1/3$ valószínűséggel, valamelyik családtag fogja a teljes újságkupacot és kidobja a szemétbe. Valahányszor öt újság gyűlik fel a kupacban, Kovács úr fogja magát és kidobja a kupacot (1 valószínűséggel). Tekintsük esténként (tehát az esetleges selejtezés után) a kupacban lévő újságok számát.
   (a) Észszerű-e Markov lánccal modellezni a folyamatot? Ha igen, azonosítsuk a Markov lánc állapotterét és írjuk fel az átmenetvalószínűségek mátrixát!
   (b) Vasárnap este üres volt az újságkupac. Mekkora valószínűséggel lesz csütörtök este pontosan egy újság a kupacban? Számítsuk ki esetszétválasztással és mátrix hatványozással is!

2. *Ehrenfest lánc.* Adott két urna (egy jobb és egy bal), melyekben összesen N golyó van. Véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kiválasztjuk valamelyik golyót, s átteszünk a másik urnába. Hogy érdemes Markov lánccal modellezni a fenti folyamatot? Mi lesz az átmenetmátrixa?

3. *Bernoulli-Laplace urnamodell keverésre.* Két urnában vannak golyóink: N darab mindkettőben. A golyók közül N kék és N piros. A golyókat a következőképpen keverjük: időegységenként kiválasztunk véletlenszerűen egy-egy golyót mindkét urnából és a kettőt kicseréljük. (Az egyes urnákban lévő golyók száma nem változik, de a színek eloszlása igen.) Írjuk le a folyamat S állapotterét és P átmenet mátrixát!

4. Legyen X_n egy család szociális osztálya az n-dik generációban. Tegyük fel, hogy a szociális osztály változásai a következő Markov átmenetmátrix által adottak.

	alsó	**közép**	**felső**
alsó	0.7	0.2	0.1
közép	0.3	0.5	0.2
felső	0.2	0.4	0.4

   (a) Ha valaki szülei középosztálybeliek, mekkora valószínűséggel lesz ő felső, gyerekei alsó osztálybeliek?
   (b) Ha a nagyszülők felső osztálybeliek, mekkora valószínűséggel lesznek az unokák középosztálybeliek?
   (c) Ha az első generációban az osztályok $(0.6, 0.3, 0.1)$ arányban oszlanak meg, milyen lesz az eloszlás a második generációban?
   (d) Létezik-e olyan kezdeti eloszlás, amely nem változik a generációk során?

5. Legyen X_t, $t = 1, 2, \ldots$ Markov-lánc, melynek állapottere S véges halmaz. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ az S állapotok részhalmazai. Következik-e a Markov tulajdonságból, hogy

$$\mathbb{P}(X_n \in A_n | X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_1 \in A_1) = \mathbb{P}(X_n \in A_n | X_{n-1} \in A_{n-1})?$$

6. Osztályozza az alábbi Markov-lánc állapotait!

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}, P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Házi feladatok

1. feladatsor, beadási határidő: 2017. február 15.

1. Legyen X_n egy olyan elágazó folyamat, amelyben az egyes egyedek leszármazottainak száma geometriai eloszlású, azaz $\mathbb{P}(Y = k) = q^k p$, ahol $q + p = 1$. Igazoljuk, hogy X_n átmenetmátrixának elemei
$$P_{i,j} = \begin{cases} \binom{i+j-1}{j} p^i q^j & \text{ha } i \geq 1, j \geq 0, \\ 1 & \text{ha } i = 0, j = 0, \\ 0 & \text{ha } i = 0, j \geq 1. \end{cases}$$

2. Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(\xi_j = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_j = 0)$. Legyen $X_n := \xi_n + \xi_{n+1} + \xi_{n+2}$. Markov lánc-e az X_n, $n \in \mathbb{N}$, valószínűségi változó sorozat?

3. Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, $\mathbb{P}(\xi_i = -1) = p = 1 - \mathbb{P}(\xi_i = 1)$ eloszlással!
   (a) Markov-láncot alkot-e az $X_n = \xi_n \xi_{n+1}$ folyamat? (Beugratós kérdés!)
   (b) Döntsük el, hogy Markov-láncot alkot-e a $Z_n := \Phi(\xi_n, \xi_{n+1})$ folyamat, ahol $\Phi(-1, -1) = 1$, $\Phi(-1, 1) = 2$, $\Phi(1, -1) = 3$, $\Phi(1, 1) = 4$.

4. Legyen X_n egy homogén, diszkrét idejű Markov-lánc, $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ állapottérrel és
$$P = \begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 3/11 & 7/11 \end{pmatrix}$$
átmenetmátrixszal, valamint μ_0 kezdeti eloszlással. Legyen továbbá
$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{ha } X_n = 1, \\ 2 & \text{ha } X_n \neq 1. \end{cases}$$
Igazoljuk, hogy Y_n Markov-láncot alkot, és írjuk fel az átmenetmátrixát!

5. N urnába egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel golyókat helyezünk el, sorban egymás után. Jelölje X_n az n-edik golyó elhelyezése után üresen maradt urnák számát. Mutassuk meg, hogy az X_n sorozat Markov láncot alkot. Számítsuk ki az átmenetvalószínűségek mátrixát és osztályozzuk az állapotokat!

6. Legyen $X_0, X_1, \ldots, X_n$ homogén, véges állapotterű Markov-lánc μ_0 kezdeti eloszlással es P átmenetmátrixszal. Mutassuk meg, hogy a $Y_i = X_{n-i}$ megfordított folyamat is egy (nem feltétlenül homogén) Markov-lánc! Adjuk meg a kezdeti eloszlását és az átmenetmátrixokat (mátrixműveletek segítségével). Mutassuk meg, hogy az átmenetmátrixok valóban sztochasztikusak, azaz a sorösszegeik 1-et adnak.