Sztochasztikus folyamatok
2. feladatsor, 2017. február 15.

1. Dobókockát azonos valószínűséggel és az előző mozgatásoktól függetlenül, diszkrét időegységenként átfordítjuk az egyik oldaláról a szomszédos négy oldal valamelyikére. Írjuk le a Markov lánc átmenetvalószínűségeinek mátrixát és találjuk meg a stacionárius eloszlását!

2. A $P = (P_{i,j})_{i,j=1}^{N}$ mátrixot *duplán sztochasztikusnak*, vagy *bisztochasztikusnak*, nevezzük, ha sor- és oszlopösszegei is 1-el egyenlőek, valamint elemei nemnegatívak. Legyen az X_t Markov lánc irreducibilis az $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ állapot-halmazon és átmenetvalószínűségeinek mátrixa bisztochasztikus. Mutassuk meg, hogy az X_t Markov lánc stacionárius eloszlása egyenletes az S halmazon, és fordítva: ha a stacionárius eloszlás egyenletes, akkor az átmenetmátrix bisztochasztikus.

3. Tekintsük az 1. feladatsor 1. feladatában leírt Markov láncot (Kovácsék újságai).
(a) Hosszú idő után mennyi a kupacban lévő újságok számának várható értéke?
(b) Tegyük fel, hogy kezdetben 0 újság van a kupacban. Várhatóan hány nap múlva lesz újból üres a kupac?

4. Tekintsünk egy Markov láncot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ötelemű állapottéren, melynek átmenetmátrixa:
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
(a) Irreducibilis-e a Markov lánc? Mennyi a periódusa a Markov láncnak?
(b) Tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul és jelöljük T-vel az 1-be való első visszatérés idejét. Számoljuk ki T eloszlását és várható értékét.

5. Legyen X_n Markov lánc az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ötelemű állapottéren, melynek átmenetmátrixa:
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$
(a) Határozzuk meg a Markov lánc stacionárius (invariáns) eloszlását.
(b) $X_0 = 1$ kezdeti feltétel mellett, mennyi annak a valószínűsége, hogy a folyamat előbb éri el a 3 állapotot, mint az 5-öt?

Házi feladatok

2. feladatsor, beadási határidő: 2017. február 22.

1. Az X_t diszkrét idejű Markov lánc állapotainak halmaza $S = \{1, 2, 3\}$, átmenet-valószínűségeinek mátrixa P, stacionárius eloszlása π. Mutassuk meg, hogy ha $P_{1,1} = P_{2,2} = P_{3,3}$ és $\pi(1) = \pi(2) = \pi(3)$, akkor $P_{1,2} = P_{2,3} = P_{3,1}$ és $P_{1,3} = P_{3,2} = P_{2,1}$.

2. Egy bűvésznek van r kalapja és n megkülönböztethetetlen nyula. Minden másodpercben mindkét kezével belenyúl egy-egy kalapba (a két kézzel egymástól függetlenül, mindkettővel egyenletesen választ kalapot). Ha a bal kézre eső kalapban van nyúl, akkor átteszi a jobb kézre eső kalapba, egyébként pedig nem csinál semmit. Hosszú idő elteltével mekkora lesz egy adott nyúl-konfiguráció valószínűsége?

3. Tekintsük azt a Markov-láncot, aminek az állapottere $S = \{x, y, z\}$ és átmenet-mátrixa
$$P = \begin{pmatrix} 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 1/20 & 1/5 & 3/4 \\ 1/18 & 5/9 & 7/18 \end{pmatrix}.$$
(a) Határozzuk meg a stacionárius eloszlást!
(b) Az x-ből indított Markov-lánc várhatóan hányat lép, amíg y-ba ér?

4. Tekintsük a 2. gyakorlati feladatsor 5. feladatának Markov láncát.
(a) Irreducibilis-e a Markov lánc? Aperiodikus-e a Markov lánc?
(b) Tegyük fel, hogy $X_0 = 1$ Mennyi a 4 állapot első eléréséig megtett lépések számának várható értéke?
(c) Legyen újból $X_0 = 1$. Mennyi az 1 állapotba való első visszatérésig megtett lépések számának várható értéke?
Segítség: (b) Írjunk fel egy egyenletrendszert $\psi(i)$-re, ($i = 1, \dots, 5$) ahol $\psi(i) =$ várható lépésszám i-ből 4-be. (c) Az ilyen típusú feladatoknál segítséget jelenthet az előadás 30. tétele.

5. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ egymásutáni szabályos kockával való kockadobások számszerű eredményei és $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Legyen $T_1 = \min\{n \geq 1 : S_n \text{ osztható 8-cal}\}$, $T_2 = \min\{n \geq 1 : S_n - 1 \text{ osztható 8-cal}\}$. Számoljuk ki $\mathbb{E}(T_1)$ és $\mathbb{E}(T_2)$-t!
Segítség: Tekintsük $S_n \mod 8$-at mint Markov láncot a $\{0, 1, \dots, 7\}$ halmazon.

6. Legyenek X_n és Y_n *független* Markov láncok a $\{0, 1, 2\}$ háromelemű állapottéren. Mindkét lánc átmenet mátrixa
$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$
Tegyük fel, hogy $X_0 = 0$ és $Y_0 = 2$ és legyen
$$T = \inf\{n > 0 : X_n = Y_n\}$$

(a) Számoljuk ki $\mathbf{E}\big(T\big)$-t.
(b) Mennyi $\mathbf{P}\big(X_T = 2\big)$?
Segítség: Tekintsük $Z_n = (X_n, Y_n)$-t mint Markov láncot a $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ kilenc elemű állapottéren.