Sztochasztikus folyamatok
3. feladatsor, 2017. február 22.

1. Tekintsük azt a Markov-láncot, aminek az állapottere $S = \{x, y, z\}$ és átmenet-mátrixa
$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Az x-ből indított Markov-lánc várhatóan hányat lép, amíg y-ba ér?
   (b) Hányszor látogatja meg a folyamat várhatóan z állapotot x-ből indulva, amíg y-ba ér?

2. Tekintsük a 1. feladatsor 1. feladatában leírt Markov láncot (Kovácsék úságai).
   (a) Hosszú idő után mennyi a kupacban lévő újságok számának várható értéke?
   (b) Tegyük fel, hogy kezdetben 0 újság van a kupacban. Várhatóan hány nap múlva lesz újból üres a kupac?

3. Osztályozzuk az alábbi Markov-lánc állapotait!
$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Tekintsünk egy egyszerű véletlen bolyongást az alábbi adjacencia-mátrixszal rendelkező gráfon:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Határozzuk meg a stacionárius eloszlását!

5. Egy öreg szakinak két izzója van a garázsban. Ha mindkettő kiég, akkor mindkettőt kicseréli és így két működővel kezdi a másnapot. A körték egy nap 0.1 valószínűséggel égnek ki, egymástól függetlenül.
   (a) Hosszú távon idejének hanyad részét tölti a szaki egy villanykörte fényénél?
   (b) Mennyi két csere közötti eltelt idő várhatóértéke?

Házi feladatok

3. feladatsor, beadási határidő: 2017. március 1. (gyakorlat vége)

1. Egy sztochasztikus önszabályozó rendszer próbál egy bizonyos paramétert a 0 közelében tartani, és ezt a következőképp teszi: a paraméter az n diszkrét idő függvényében egy X_n Markov lánc, melynek állapottere $\mathbb{Z}$, és átmenetvalószínűségei

$$P_{i,i+1} = \begin{cases} p, & \text{ha } i > 0 \\ 1/2, & \text{ha } i = 0 \\ q, & \text{ha } i < 0, \end{cases} \quad P_{i,i-1} = \begin{cases} q, & \text{ha } i > 0 \\ 1/2, & \text{ha } i = 0 \\ p, & \text{ha } i < 0, \end{cases}$$

   ahol $q = 1 - p$.

   (a) Milyen p értékekre lesz az alábbi egy valószínűségi eloszlás $\mathbb{Z}$-n?

$$\pi(i) = \begin{cases} \frac{q-p}{2q}, & \text{ha } i = 0 \\ \frac{q-p}{4pq}\left(\frac{p}{q}\right)^{|i|}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   (b) Mutassuk meg, hogy – amennyiben értelmes – π a lánc stacionárius eloszlása.

2. Mutassuk meg, hogy a Bernoulli-Laplace-féle urnamodell egyetlen stacionárius eloszlása $\pi(k) = \binom{N}{k}^2 \Big/ \binom{2N}{N}$.

3. Írjuk fel a számokat 1-től 12-ig körben az óramutató járásával megegyezően (tekintsünk egy órát). Legyen X_n az a Markov-lánc amely egy számról a két szomszédos számra egyenlő valószínűséggel ugrik.

   (a) Mi a megtett lépések várható értéke, mielőtt X_n visszaérkezik a kezdő helyére?

   (b) Mi a valószínűsége, hogy X_n meglátogatja az összes többi állapotot, mielőtt visszaérkezik a kezdő helyére?

4. Tekintsük a szomszédok közül egyenletesen választó bolyongást a következő egyszerű G gráfon: $V(G) = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, és B, C, D, E, F, G csúcsok közül bármelyik kettőt él köti össze, valamint A össze van kötve B-vel és C-vel.

   (a) Az A-ból indított bolyongás várhatóan hány lépést tesz meg, mielőtt A-ba visszaér?

   (b) Ha a bolyongó B-ből indul, várhatóan hány lépést tesz meg azelőtt, hogy A-ba érne?

5. Legyen G olyan irányítatlan véges gráf, ami esetleg tartalmaz hurokéleket és párhuzamos éleket. A bolyongó mindig egyenletesen választ az aktuális csúcsból kiinduló utak közül (tehát a hurokélek duplán számítanak). Mi a bolyongás stacionárius eloszlása?

6. Osztályozzuk az alábbi Markov-lánc állapotait! (A következők szerint: null-rekurrens, pozitív-rekurrens, ergodikus, tranziens.)

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$