Sztochasztikus folyamatok
4. feladatsor, 2017. március 1.

1. A BME Sztochasztika tanszéken három fénymásológép van, amelyek $1/10$ valószínűséggel mennek tönkre egy nap. Amennyiben van tönkrement gép, a karbantartó $1/2$ valószínűséggel megjavít egyet, és az másnap már használható. Tegyük fel, hogy egy nap nem mehet tönkre két fénymásoló egyszerre. Modelezzük a feladatot Markov lánccal, és számoljuk ki a stacionárius eloszlását!
2. *(Gambler's ruin)* Egy rulett asztalnál minden pörgetésnél p valószínűséggel nyerünk \$1-t, s q valsószínűséggel veszítünk \$1-t. A játékot abbahagyjuk, ha tönkrementünk (\$0-unk van) vagy ha elértük az N dolláros összeget. Mekkora a valószínűsége, hogy x dollárról indulva N dollárral állunk fel az asztaltól?
3. Tekintsük az egyszerű, szimmetrikus bolyongást $\mathbb{Z}$-n. Ez a bolyongás tranziens, null rekurrens vagy pozitív rekurrens? (Útmutatás: használjuk a Stirling formulát.)
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Sztochasztikus folyamatok
4. feladatsor, 2017. március 1.

1. A BME Sztochasztika tanszéken három fénymásológép van, amelyek $1/10$ valószínűséggel mennek tönkre egy nap. Amennyiben van tönkrement gép, a karbantartó $1/2$ valószínűséggel megjavít egyet, és az másnap már használható. Tegyük fel, hogy egy nap nem mehet tönkre két fénymásoló egyszerre. Modelezzük a feladatot Markov lánccal, és számoljuk ki a stacionárius eloszlását!
2. *(Gambler's ruin)* Egy rulett asztalnál minden pörgetésnél p valószínűséggel nyerünk \$1-t, s q valsószínűséggel veszítünk \$1-t. A játékot abbahagyjuk, ha tönkrementünk (\$0-unk van) vagy ha elértük az N dolláros összeget. Mekkora a valószínűsége, hogy x dollárról indulva N dollárral állunk fel az asztaltól?
3. Tekintsük az egyszerű, szimmetrikus bolyongást $\mathbb{Z}$-n. Ez a bolyongás tranziens, null rekurrens vagy pozitív rekurrens? (Útmutatás: használjuk a Stirling formulát.)
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Házi feladatok

4. feladatsor, beadási határidő: 2017. március 8.

1. Az eső minden nap a többitől naptól függetlenül, 1/3 valószínűségggel esik, és ha esik, akkor pontosan délben esik. Egy öreg kertész akkor locsolja meg a kertjét, ha látja, hogy se ma délben, se tegnap, se tegnapelőtt nem érte víz (azaz locsolás vagy eső) a kertet. Várhatóan hányszor locsol egy évben?

2. Négyből három teherautót személyautó követ az utakon, míg mindössze minden ötödik személyautót követ teherautó. A járművek hány százaléka teherautó? (feltéve, hogy csak személy- és teherautók vannak az utakon.)

3. Tekintsünk egy Markov-láncot $\mathbb{N}$-en a következő átmenetvalószínűségekkel:

$$P_{i,i+1} = q < 1/2,\ P_{i,i-1} = p = 1 - q,\ \text{ha } i \geq 1$$

   és $P_{0,1} = 1$. Határozzuk meg a lánc stacionárius eloszlását!

4. Tekintsünk egy Markov-láncot $\mathbb{N}$-en a következő átmenetvalószínűségekkel:

$$P_{i,i+1} = \frac{1}{i+1},\ P_{i,i-1} = \frac{i}{i+1},\ \text{ha } i \geq 0.$$

   Határozza meg a Markov-lánc stacionárius eloszlását!

5. *Visszaverő falas bolyongás az egyenesen.* Az egyenes $1, 2, 3, 4$ pontjain bolyongunk. Jelölje X_n azt a Markov láncot, amely 2/3 valószínűséggel jobbra lép az egyenesen, 1/3 valószínűséggel balra, de ha eléri az 1 vagy a 4 állapotot, akkor 1 valószínűséggel visszafordul.

   (a) Mi lesz a lánc átmenet-mátrixa?

   (b) Mi lesz a stacionárius eloszlás?

6. Tekintsük az origóból indított egyszerű, szimmetrikus bolyongást. Legyenek a és b pozitív egészek. Az origótól bal felé b lépésnyire van egy gödör és jobb fele a lépésnyire van egy másik gödör. A bolyongó előbb-utóbb bele fog esni valamelyik gödörbe.

   (a) Mekkora valószínűséggel fog a bal szélső gödörbe esni a bolyongó?

   (b) Várhatóan hány lépést tesz a bolyongó, amíg gödörbe esik?