Sztochasztikus folyamatok
5. feladatsor, 2017. március 8.

1. Legyen (X_n) homogén, diszkrét idejű Markov-lánc az $S = \{1, \ldots N\}$ állapottéren, P átmenetmátrixszal.

   (a) Legyen $Y_n = \begin{cases} 1 & \text{ha } X_n = 1, \\ 2 & \text{ha } X_n \neq 1 \end{cases}$. Mutassunk példát, amikor Y_n NEM Markov-lánc!

   (b) Legyen $\varphi : S \mapsto \widehat{S}$, nem feltétlenül injektív leképezés. Milyen feltételnek kell P-nek eleget tenni, hogy $Y_n = \varphi(X_n)$ is Markov-lánc legyen? Adja meg $\{Y_n\}$ átmenetmátrixát!

2. Egy gyár munkásait három csoportba sorolhatjuk: Tanuló, Munkás, Felügyelő. Továbbá vannak, akik elhagyják a gyárat, ill. akiket kirúgnak (X). Tegyük fel, hogy egy munkás pályája Markov, átmenet mátrixa:

$$\begin{array}{ccccc} & T & M & F & X \\ T & 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ M & 0 & 0.55 & 0.15 & 0.3 \\ F & 0 & 0 & 1 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

   (a) A Tanulóknak hány százaléka lesz Felügyelő?

   (b) Várhatóan mennyi idő telik el, amíg egy Tanulóból Felügyelő lesz, vagy elhagyja a gyárat (X)?

3. Egy gépjármű felelősségbiztosító három kategóriába sorolja ügyfeleit: Jó, Közepes, Rossz. Évente vizsgálják felül a besorolást, ezt az átsorolást Markov lánccal modellezhetjük, melynek átmenet mátrixa:

$$\begin{array}{cccc} & J & K & R \\ J & 0.6 & 0.4 & 0 \\ K & 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ R & 0 & 0.2 & 0.8 \end{array}.$$

   Sok év elteltével milyen arányban oszlanak meg a három kategória között az ügyfelek?

4. Lássa be, hogy egy Markov lánc átmenetmátrixa akkor és csak akkor szimmetrikus, ha bisztochasztikus és reverzibilis!

Házi feladatok

5. feladatsor, beadási határidő: 2017. március 22.

1. Határozzuk meg, hogy mely $0 < a, b, c, d < 1$ paraméterek esetén elégíti ki a detailed balance condition-t egy Markov lánc, melynek átmenet mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 1-a \\ 1-b & 0 & b & 0 \\ 0 & 1-c & 0 & c \\ d & 0 & 1-d & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Legyen $G = G(V, E)$ egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő gráf. Emlékezzünk, hogy a bolyongást a gráfon úgy definiáltuk, hogy a bolyongó minden egyes lépésben kiválaszt egy egyenletes csúcsot a szomszédok közül, és oda ugrik. Tekintsük a bolyongás lusta verzióját: minden esetben $1/2$ valószínűséggel helyben marad a bolyongó, $1/2$ valószínűséggel pedig az előbb leírt lépést hajtja végre. Írjuk fel az átmenetvalószínűség-mátrixot (a sima bolyongás P átmenetvalószínűség-mátrixa segítségével) és a stacionárius eloszlást!

3. Legyenek X_n és Y_n független Markov láncok az $S = \{0, 1, 2\}$ háromelemű állapottéren. Mindkét lánc átmenet mátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Hosszú időn keresztül az idő hanyad részét tölti a két Markov lánc azonos állapotban?

4. Aladár és Béla, két régi jóbarát nem tudják egymásról, hogy mindketten beiratkoztak a Műegyetemre. Aladár az X menzát szereti jobban, Béla az Y menzát, de mindketten szeretik a változatosságot. Ezért Aladár elhatározza, hogy az első nap az X menzába megy, majd ezután minden X menzás napot követő tanítási napon $1/2$ valószínűséggel az Y menzába megy, és $1/2$ valószínűséggel újra az X menzába megy, viszont minden Y menzás napot követő tanítási napon $3/4$ valószínűséggel az X menzába megy, és $1/4$ valószínűséggel újra az Y menzába megy. Béla pedig az Y menzával kezdi az első tanévet, és úgy tervezi, hogy minden Y menzás napot követő tanítási napon $1/2$ valószínűséggel az Y menzába megy, és $1/2$ valószínűséggel az X menzába, viszont minden X menzás napot követő tanítási napon $2/3$ valószínűséggel az Y menzába megy, és $1/3$ valószínűséggel az X menzába. Ehhez mindketten tartják is magukat egészen addig, amikor egy szép napon először mennek ugyanabba a menzába, ahol is találkoznak. Ettől kezdve minden nap megbeszélik, hogy a következő nap együtt mennek ebédelni, mégpedig (a demokrácia szabályait maximálisan szem előtt tartva) X menzás napot követően Y menzába mennek $7/12$ valószínűséggel és újra az X menzába $5/12$ valószínűséggel, illetve Y menzás nap után X menzába mennek $5/8$ valószínűséggel és újra Y-ba $3/8$ valószínűséggel.

(a) Várhatóan hanyadik tanítási napon találkoznak először?

(b) Mi a valószínűsége, hogy az X menzában látják meg egymást először?

(c) Hosszú tanulmányaik során közelítőleg ebédjeik hány százalékát fogják az X menzában elfogyasztani?

Útmutatás: Tekintsük $C_n = (A_n, B_n)$-t mint Markov láncot a $\{X, Y\} \times \{X, Y\}$ négy elemű állapottéren.

5. Egy bank négy kategóriába sorolja azokat az ügyfeleit, akiknek kölcsönt folyósított. Van aki már kifizette a tartozását (A), van aki rendesen fizeti a részleteket (B), van akinek elmaradásai vannak (C), és van aki becsődölt (D). Ha Markov lánccal modellezzük az ügyfelek besorolásának idő beli fejlődését, akkor a következő átmenet mátrixot kapjuk:
$$\begin{array}{ccccc} & A & B & C & D \\ A & 1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ C & 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ D & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$
A most B besorolású ügyfeleknek hány százaléka fogja végül kifizetni a teljes tartozását?

6. Legyen X_n egy véges S állapotterű homogén Markov lánc és $A \subset S$ úgy, hogy $\mathbb{P}_x(T_A < \infty) > 0$ minden $x \in S$-re, ahol $T_A = \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\}$. Tekintsük $g : S \mapsto \mathbb{R}$ függvényt, melyre, $g(a) = 0$ minden $a \in A$ esetén és minden $b \in S \setminus A$ elemére az állapottérnek
$$g(b) = 1 + \sum_{x \in S} P_{b,x} g(x).$$
Igazolja, hogy $g(x) = \mathbb{E}_x(T_A)$! (Tipp: használjuk az $x \mapsto \mathbb{E}_x(g(X_{\min\{n,T_A\}}))$ függvény sorozatot!)