Sztochasztikus folyamatok
6. feladatsor, 2017. március 22.

1. Legyen X_n irreducibilis és aperiodikus Markov lánc az $\{1, 2, \ldots, N\}$ állapottéren. Bizonyítsuk be, hogy léteznek $C < 1$ és $\delta < 1$ konstansok, úgy, hogy bármely i és j állapotokra
$$\mathbb{P}\left(X_m \neq j, m = 1, 2, \ldots, n | X_0 = i\right) \leq C\delta^n$$
Mutassuk meg, hogy ebből következik $\mathbb{E}(T_j) < \infty$. (Útmutatás: Létezik $\varepsilon > 0$, úgy, hogy bármely i és j állapotokra, annak a valószínűsége, hogy i-bol indulva az elso N lépés során a Markov lánc eléri a j állapotot, nagyobb, mint ε).

2. Ottó gyermekeinek száma 0, 1, 2 vagy 3, mindegyik $1/4 - 1/4$ valószínűséggel. Ottó minden egyes leszármazottjának gyermekeinek száma is ugyanilyen eloszlású és a többiekétől független.
   (a) Jelölje X Ottó ükunokáinak számát. Adjuk meg X generátorfüggvényét! Számítsuk ki $\mathbb{E}(X)$ és $Var(X)$ értékét!
   (b) Számítsuk ki annak az esélyét, hogy Ottó leszármazottai előbb-utóbb kihalnak.

3. Tekintsünk egy elágazó folyamatot, melynél egy szülő gyermekei számának eloszlása $(p_i)_{i=0}^{\infty}$, $p_i > 0$. Ebből irreducibilis Markov láncot csinálunk, úgy, hogy ha a populáció kihal, a következő lépésben egy új egyedet ültetünk be kívülről. Mely $(p_i)_{i=0}^{\infty}$ eloszlásokra lesz az így értelmezett Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens, illetve tranziens?

4. Legyen egy elágazó folyamat utódeloszlásának generátorfüggvénye G. Fejezzük ki G segítségével a következő események feltételes valószínűségét!
   (a) A folyamat kihal, feltéve, hogy az első generáció létszáma k.
   (b) A folyamat nem hal ki, feltéve, hogy az első generáció nem halt ki.

Házi feladatok

6. feladatsor, beadási határidő: 2017. március 29.

1. Tekintsük az $I = [0,1]$ intervallumot, osszuk fel N egyforma hosszú intervallumra és tekintsük ezen intervallumok lezártját. Minden kisebb intervallumot egymástól függetlenül, p valószínűséggel megtartunk, vagy $1-p$ valószínűséggel elhagyunk. Az így kapott kisebb intervallumokra megismételjük az eljárát. Az így kapott $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$ halmaz sorozat esetén mely p és N paraméterekre lesz $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ halmaz pozitív valószínűséggel nem üres?

2. Egy baktériumtenyészet kezdetben egyetlen sejtből áll. Minden perc végén minden egyes baktérium a többiektől függetlenül p_0 valószínűséggel meghal, p_1 valószínűséggel túlél és p_2 valószínűséggel kettéosztódik ($p_0 + p_1 + p_2 = 1$).
   (a) Milyen p_0, p_1, p_2 valószínűségekre lesz a tenyészet szubkritikus, kritikus, illetve szuperkritikus?
   (b) Mekkora a valószínűsége, hogy a tenyészet soha nem pusztul ki?

3. Egy fagyiárus bódéja előtt sorbanállva várnak az emberek, hogy vásárolhassanak. Az árus egy perc alatt egy embert szolgál ki, ezalatt p valószínűséggel érkezik 3 új ember ($1-p$ valószínűséggel pedig senki sem érkezik.) Tegyük fel, hogy kezdetben 1 ember van. A p valószínűség értékétől függően mi a valószínűsége annak, hogy egyszer elfogy a sor?
   Segítség: Modellezzük a feladatot elágazó folyamattal! Legyen $X_0 = 1$ és X_1 azoknak az embereknek a száma, akik az első ember kiszolgálása után állnak a sorban!

4. Tekintsük az X_n Markov láncot az $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ állapottéren, melynek átmenet valószínűségei:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\big(X_{n+1} = j+2 \big| X_n = j\big) = p, \\ &\mathbf{P}\big(X_{n+1} = \max(j-1, 0) \big| X_n = j\big) = 1-p, \end{aligned} \qquad j \in S.$$

   Mely p értékekre lesz a Markov lánc tranziens, null rekurrens, illetve pozitív rekurrens?
   Segítség: Emlékezzünk az előző feladatra!

5. A szimplex-módszer lineáris függvényeket minimalizál úgy, hogy egy szimplex extremális pontjai közt mozog úgy, hogy közben a célfüggvény csökken. Tegyük fel, hogy n extremális pont van (jelölje ezeket $1, \dots, n$) különböző célfüggvény értékekkel, és ezek sorba vannak rendezve a célfüggvény értéke szerint (1-es az optimum). Tegyük fel, hogy egy $j > 1$ állapotból egyenlő valószínűséggel lépünk a nála jobb $j-1$ állapotba, 1-ből pedig 1-be lépünk.
   (a) Lássuk be, hogy $i > 1$ esetén az első állapot elérésének várható ideje i-ből indulva

$$\mathbf{E}_i(T_1) = 1 + \frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{i-1}.$$

(b) $I_j := \mathbf{1}\{$A lánc meglátogatja j-t amíg n-ből 1-ba ér$\}$. Lássuk be, hogy $j < n$ esetén

$$\mathbf{P}(I_j = 1 \mid I_{j+1}, \ldots, I_n) = 1/j,$$

és következtessünk arra, hogy az I_j-k függetlenek. Mutassuk meg, hogy *(b)*-ből miért következik *(a)*.

6. Legyen X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, melynek véges a második momentuma, azaz $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Fejezzük ki az $S := \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(X \geq k)$ mennyiséget $\mathbf{E}(X)$ és $\mathrm{var}(X)$ segítségével! A gyakorlati feladatsor 1. feladatának eredményeit ismertnek tekintve adjunk felső becslést $\mathbf{E}(T_j^2)$-re!