Sztochasztikus folyamatok
7. feladatsor, 2017. március 29.

1. Egy kis forgalmú úton átlagosan 2 percenként halad el egy autó. Kiállok az út mellé és számolom az autókat. Mi a valószínűsége annak, hogy...
   (a) 5 percen keresztül egy autó sem halad el mellettem?
   (b) 4 perc alatt legfeljebb 3 autó megy el mellettem?
   (c) 2 percen át nem megy el mellettem autó, majd az azt követő 2 percben pontosan 3?
   (d) Az elhaladó autók tizede piros. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 5 perc alatt nem megy el mellettem piros autó?
   (e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 3 perc alatt 1 piros és 2 más színű autó megy el mellettem?
2. Legyen $N(t)$ egy Poisson folyamat $\lambda = 3$ rátával. Jelölje T_n az n-edik esemény idejét. Határozzuk meg $\mathbb{E}(T_{12})$, $\mathbb{E}(T_{12}|N(2) = 5)$ és $\mathbb{E}(N(5)|N(2) = 5)$ értékét!
3. Barátunk pecázik. Tegyük fel, hogy homogén Poisson folyamat szerint van kapása, óránként átlagosan 3. A kapások 2/3-át sikerül ténylegesen kifognia, a többi leakad. Továbbá, a fogott halak tömege független és azonos eloszlású, várhatóan 2 kg, 1 kg szórással. Várhatóan hány kiló halat fog 3 óra alatt? Mekkora a fogott halak tömegének szórása?
4. Legyenek $N_1(t), \dots, N_k(t)$ független, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ Poisson folyamatok. Mutassuk meg, hogy ekkor $N_1(t) + \dots + N_k(t)$ egy $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ paraméterű Poisson folyamat!
5. Egy üzlet pénztáránál sorban állnak a vásárlók. A vásárlók érkezési ideje λ paraméterű Poisson folyamatot alkot. Az egyes vásárlók kiszolgálása független, azonos μ paraméterű exponenciális eloszlású ideig tart. Egy vásárló kiszolgálásának ideje alatt mennyi a sorhossz növekedésének várható értéke? Ha az egymásutáni vásárlók érkezése közötti idő várható értéke fél perc és az egyes vásárlók kiszolgálási idejének várható értéke három perc, hány pénztárat kell működtetni ahhoz, hogy ne legyen nagy a morgás?

Házi feladatok

7. feladatsor, beadási határidő: 2017. április 5.

1. Egy radioaktivitást mérő számlálóberendezés ezredmásodpercenként tud ugrani, és akkor ugrik egyet a $t = \frac{k}{1000}$ időpontban, ha volt beérkező alfa-részecske a $(t - \frac{1}{1000}, t]$ időintervallumban. Jelölje $T(n)$ azt a véletlen időpontot, amikor először mutat n értéket a számláló. Jelölje $N(t)$ a számlálóberendezés állását a t időpontban.
   (a) *(A felújításelmélet alaptrükkje)* Melyik igaz a következő két állítás közül?
   $$\mathbf{P}(N(t) \leq n) = \mathbf{P}(T(n) \geq t), \quad \mathbf{P}(N(t) < n) = \mathbf{P}(T(n) > t)$$
   Lássuk be, hogy $\mathbf{P}(N(t) = n) = \mathbf{P}(T(n) \leq t) - \mathbf{P}(T(n+1) \leq t)$!
   (b) Fejezzük ki $T(n)$ eloszlásfüggvényét az $N(t)$ eloszlásának segítségével!
   (c) Tegyük fel, hogy egy ezredmásodperc alatt $p = \frac{1}{500}$ valószínűséggel érkezik alfa-részecske, a múlttól függetlenül. Határozza meg $T(n)$ és $N(t)$ eloszlását!
   (d) Adjunk $T(1)$ eloszlásfüggvényére egyszerű közelítő formulát a Binomiális eloszlás Poisson-approximációja segítségével. Milyen (nevezetes) abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye ez?

2. Tekintsünk egy 1 paraméterű Poisson-pontfolyamatot az egyenesen. Legyen X_1 a 0 és 4 közötti érkezések száma, X_2 pedig a 3 és 5 közötti érkezések száma. Mennyi $cov(X_1, X_2)$? (Tipp: Bontsuk fel X_1-et és X_2-t is további változók összegére!)

3. Egy telefonközpontba 5 perc alatt átlagosan 7 helyi hívás és 3 távolsági hívás érkezik.
   (a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 2 perc alatt pontosan 1 távolsági hívás érkezik?
   (b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 2 perc alatt legfeljebb 3 hívás érkezik összesen?
   (c) Mekkora a feltételes valószínűsége annak, hogy egy 2 perces időszak alatt pontosan 1 távolsági hívás érkezik, feltéve, hogy ugyanezen idő alatt legfeljebb 4 hívás érkezik összesen?

4. Egy matek prof épp az egyetemre megy, vár a buszra. Mivel nem nézte meg a menetrendet, feltehető, hogy a következő busz $(0, 0.5)$-en egyenletes óra múlva jön. A megálló előtt Poisson folyamat szerint haladnak el autók, óránként átlagosan 12. Minden előtte elhaladó autó mindentől függetlenül 1/3 valószínűséggel veszi fel. Mekkora a valószínűsége annak, hogy busszal megy az egyetemre?

5. A főútvonalon egyirányú a forgalom és a járművek elhaladása λ paraméterű Poisson folyamat. A keresztező mellékútvonalon az áthaladás a időt vesz igénybe. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mellékútvonalon érkező autós k járműnek kell elsőbbséget adjon, mielőtt áthaladhat a kereszteződésen?

6. Tekintsünk az $\mathbb{R}^2$ síkon egy λ sűrűségű, homogén Poisson pontfolyamatot. Válasszuk ki a sík egy tetszőleges, de rögzített pontját (az origót) és határozzuk meg a hozzá legközelebb eső véletlen pont távolságának sűrűségfüggvényét!
Segítség: Először állapítsuk meg az eloszlásfüggvényt!