Sztochasztikus folyamatok
8. feladatsor, 2017. április 5.

1. Egy üzlet pénztáránál sorban állnak a vásárlók. A vásárlók érkezési ideje λ paraméterű Poisson folyamatot alkot. Az egyes vásárlók kiszolgálása független, azonos μ paraméterű exponenciális eloszlású ideig tart. A sorban állók türelmetlenek: azok, akik várnak (és éppen nem őket szolgálják ki) néha úgy döntenek, hogy elhagyják a sort és hazamennek. Mindezt a sorban elfoglalt helyüktől függetlenül μ rátával teszik. Határozzuk meg a sorban állók számának eloszlását a stacionárius állapotban!

2. Legyen X_t folytonos idejű Markov lánc az $S = \{1; 2\}$ állapottéren, melynek infinitezimális generátora
$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
Határozzuk meg a P_t átmenetvalószínűség-mátrixot!

3. Legyen X_t folytonos idejű Markov lánc az $S = \{1; 2; 3; 4\}$ állapottéren, melynek infinitezimális generátora
$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Írjuk fel az X_t Markov lánc stacionárius (invariáns) eloszlását.
   (b) Tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul. Mennyi az első ugrásig eltelt idő várható értéke?
   (c) Újból tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul. Mennyi a 4 állapot első elérési idejének várható értéke?

Házi feladatok

8. feladatsor, beadási határidő: 2017. április 12.

1. Egy üzlet pénztáránál sorban állnak a vásárlók. A vásárlók érkezési ideje λ paraméterű Poisson folyamatot alkot. Az egyes vásárlók kiszolgálása független, azonos μ paraméterű exponenciális eloszlású ideig tart. Sok idő után betoppanok a boltba és beállok a sorba. Mi az eloszlása annak az időtartamnak amit a sorban töltök?
Segítség. Legyen $n = 1, 2, \ldots$-re $\mathbb{P}(\nu = n) = (1-p)^{n-1}p$ és legyenek $X_1, X_2, \ldots$ azonos $\mathrm{Exp}(\lambda)$ eloszlású valószínűségi változók, és legyen minden mindentől független. Előadáson láttátok, hogy a $\sum_{k=1}^{\nu} X_k$ véletlen tagszámú összeg is exponenciális eloszlású!

2. Egy üzemben 2 gép és 2 szerelő van. A gépek hibátlan üzemelésének ideje 1 paraméterű exponenciális eloszlású. Ha egy gép elromlik, akkor egy szerelő azonnal elkezdi javítani a gépet. A szerelés ideje exponenciális eloszlású 3 paraméterrel. A működési és szerelési idők függetlenek egymástól, eredetileg minden gép működik. Határozza meg a t időpontban működésben lévő gépek számának eloszlását, azaz annak a valószínűségét, hogy t-kor pontosan k gép üzemel, $k = 0, 1, 2$.

3. Egy tengeralattjáró irányítását három műszer segíti. Ha ezek közül legalább kettő működik, akkor a tengeralattjáró jól irányítható, és így munkában marad. Ha viszont csak egy működik, akkor a hibás műszereket azonnal meg kell javítani, és a munka szünetel. Tegyük fel, hogy az egyes műszerek meghibásodásáig eltelt idő független exponenciális 1, 1.5, ill. 3 paraméterrel. Ha tudjuk, hogy mind a három műszer hibátlanul működik egy éve, akkor várhatóan mennyi ideig használhatják még a tengeralattjárót javítás nélkül?

4. Egy napos napon három béka egy pocsolyánál játszik. Ha valamelyikük a szárazon van, akkor a többiektől függetlenül 1 rátával beugrik a pocsolyába, hogy hűsítse magát. Ha pedig a pocsolyában van, akkor a többiektől függetlenül kiugrik a szárazra 2 rátával, hogy egy kicsit megmelegedjen. Jelölje X_t a t-kor a pocsolyában lévő békák számát. Határozzuk meg X_t stacionárius eloszlását kétféleképpen:

   (a) a *detailed balance condition* felhasználásával, az $S = \{0, 1, 2, 3\}$ állapot téren értelmezett infinitezimális generátor segítségével, és

   (b) úgy, hogy észre vesszük, hogy a három béka egymástól függetlenül azonos eloszlású Markov lánc szerint mozog az $\hat{S} = \{0, 1\}$ kétállapotú állapot téren.

5.+6. (*Yule folyamat*) Egy petricsészében $t = 0$-kor van egy amőba. Egy amőba $\mathrm{Exp}(1)$ idő elteltével kettéosztódik és lesz belőle két ugyanolyan amőba mint az eredeti. Ekkor azt állítom, hogy a Petri csészében lévő amőbák X_t száma $\mathrm{Geo}(e^{-t})$ eloszlású, vagyis hogy $\mathbb{P}(X_t = k) = (1 - e^{-t})^{k-1}e^{-t}$, $k = 1, 2, \ldots$. Lássuk ezt be két féleképpen:

(a) Először olyan módon, hogy felírjuk az X_t folyamat infinitezimális generátorát, és leellenőrzzük, hogy az amőbák eloszlásának időbeli fejlődésére felírható differenciálegyenlet-rendszert és a $\mu_k(0) = \delta_{k,1}$ kezdeti feltételt valóban kielégítik a $\mu_k(t) = (1 - e^{-t})^{k-1} e^{-t}$ függvények.

(b) Majd a következő felhasználásával: tudjuk, hogy ha $U_1, \ldots, U_n$ független és Exp(1) eloszlású valószínűségi változók, akkor $\max\{U_1, \ldots, U_n\}$ ugyanolyan eloszlású, mint a $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ független összeg, ahol $V_i \sim \text{Exp}(i)$ (pirospontért ezt is be lehet látni!). További segítség: $X_t = k$ esemény átfogalmazásában használjuk fel az N_k illetve N_{k-1} valószínűségi változókat, ahol N_m az m-edik osztódás időpontja.