Sztochasztikus folyamatok
9. feladatsor, 2017. április 12.

1. Egy forgalmas helyen lévő pénzváltóba átlagosan 5 percenként érkezik egy ügyfél. Egy ügyfél kiszolgálása átlagosan 2 percig tart. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül még legfeljebb ketten tartózkodhatnak a helyiségben; ha olyankor érkezne ügyfél, amikor a helyiség tele van, akkor azonnal továbbmegy (mondjuk egy másik pénzváltóhoz).
   - (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.
   - (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.
   - (c) Hosszú távon az idő mekkora részében van tele a helyiség? Az érkező ügyfelek hány százalékának kell továbbmenni?
2. Egy autójavító műhelyben két állás van és egy parkolóhely. Egy autó javítási ideje 2 paraméterű exponenciális eloszlású időt vesz igénybe. A javítandó autók 3 paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek. Az az autós, aki nem tud beállni az állások egyikére, 1/2 valószínűséggel a parkolóba áll, 1/2 valószínűséggel rögtön továbbhajt.
   - (a) Írja fel a Markov-lánc infinitezimális generátorát!
   - (b) Az érkező autóknak hány százalékával tudnak foglalkozni a műhelyben?
   - (c) Egy autó javítása átlagosan 10000Ft-ba kerül. Mennyi a műhely bevételének várható értéke egy 8 órás műszakban?
   - (d) Írja fel a beágyazott (embedded) Markov lánc átmenetmátrixát!
   - (e) Várhatóan mennyi idő telik el, amíg mindkét állás szerelője el tud menni kávézni, ha most minden állás és parkoló tele van?
   - (f) Kisebb beruházás után a parkolóhelyek számát megnövelték végtelenre. Mi lesz a műhelyben lévő autók eloszlása a stacionárius állapotban?
3. Tekintsünk egy születési halálozási folyamatot a következõ rátákkal: $n > 0$ egyed esetén $\lambda_n = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n}$ rátával új egyed születik ($n \to n+1$), $\mu_n = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n}$ rátával meghal egy egyed ($n+1 \to n$), továbbá $\lambda_0 = \mu_0 = 1/2$. Bizonyítsuk be, hogy a lánc pozitív rekurrens ha $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$!

Házi feladatok

9. feladatsor, beadási határidő: 2017. április 19.

1. Legyen X_t folytonos idejű Markov lánc az $S = \{1, 2\}$ állapottéren, melynek ugrási rátái: $q(1, 2) = \lambda$, illetve $q(2, 1) = \mu$. Írjuk fel az átmenet valószínűségek P^t félcsoportját és a stacionárius eloszlást!

2. Egy sorban állási modellben egy kiszolgáló van, aki μ rátával szolgál ki. Új sorban állók λ rátával érkeznek. Az új érkezők, ha n hosszú sort látnak maguk előtt, akkor $1/(n + 1)$ valószínűséggel maradnak, $n/(n + 1)$ valószínűséggel úgy döntenek, hogy hazamennek és nem jönnek többé vissza. Határozzuk meg a sorban állók számának eloszlását a stacionárius állapotban!

3. Egy sorbanállási modellben egy kiszolgáló van, aki μ rátával szolgál ki. Új sorban állók λ rátával érkeznek. Azonban, a sorban állók türelmetlenek: azok, akik várnak (és éppen nem őket szolgálják ki) néha úgy döntenek, hogy elhagyják a sort és haza mennek. Mindezt a sorban elfoglalt helyüktől függetlenül ϱ rátával teszik. Határozzuk meg a sorban állók számának eloszlását a stacionárius állapotban abban az esetben, amikor $\varrho \neq \mu$!

4. Egy boltba 3 paraméterű Poisson folyamat szerint jönnek a vásárlók. Jelenleg négy pénztáros dolgozik, akik exp(1) idő alatt szolgálják ki a vevőket. Jobban járnának-e a vásárlók, ha csak egy ügyesebb pénztáros dolgozna, aki exp(4) idő alatt szolgál ki egy vevőt?

5. Legyen G egy véges állapotterű, irreducibilis, folytonos idejű Markov lánc infinitezimális generátora.
   (a) Legyen c olyan pozitív szám, amely (szigorúan) nagyobb a G mátrix minden átlós elemének abszolút értékénél. Legyen $P := c^{-1}G + I$. Mutassuk meg, hogy P ugyanazon véges állapottér feletti irreducibilis és aperiodikus diszkrét idejű Markov lánc átmenet valószínűségeinek mátrixa.
   (b) A (a)-beli eredmény felhasználásával bizonyítsuk be, hogy a G mátrixnak 0 egyszeres sajátértéke, melyhez tartozó baloldali sajátvektor (sorvektor) valószínűségi eloszlás az állapottéren és G minden további sajátértékének negatív a valós része.

6. Az $X_t \in \mathbb{N}$ Markov folyamat egy populáció méretének időbeli fejlődését modellezi. A populáció minden egyes egyede a többiektől függetlenül λ rátával szül egy új egyedet és μ rátával elhal, valamint ν rátával egy bevándorló érkezik kívülről. Így olyan születési/halálozási folyamatot kapunk, melynek születési rátái $\lambda_n = n\lambda + \nu$, halálozási rátái pedig változatlanul $\mu_n = n\mu$. Mely λ, μ, ν paraméter értékek mellett lesz a folyamat tranziens illetve rekurrens?