Sztochasztikus folyamatok
10. feladatsor, 2017. április 19.

1. Két kockával dobunk. Legyen X az egyik kocka eredménye, Z pedig a kettő összege. Számoljuk ki $\mathbf{E}(X \mid Z)$-t.
2. Legyen X es Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \frac{\exp(-x/y)\exp(-y)}{y}\mathbf{1}[0 < x, 0 < y]$$

   Számítsa ki $\mathrm{var}(X)$ értékét (minél kevesebb integrálással)! Segítség: egy m várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete m^2.
3. Minden konvex $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez definiáljuk az $\mathcal{L}_f$ függvényteret, amelynek $L(x) = ax + b$ alakú elemei olyan függvények, hogy grafikonjuk teljes egészében f grafikonja alatt van. Ennek segítségével lássuk be a feltételes várhatóérték Jensen-egyenlőtlenségét:

$$\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{F}) \geq f(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})).$$

Sztochasztikus folyamatok
10. feladatsor, 2017. április 19.

1. Két kockával dobunk. Legyen X az egyik kocka eredménye, Z pedig a kettő összege. Számoljuk ki $\mathbf{E}(X \mid Z)$-t.
2. Legyen X es Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \frac{\exp(-x/y)\exp(-y)}{y}\mathbf{1}[0 < x, 0 < y]$$

   Számítsa ki $\mathrm{var}(X)$ értékét (minél kevesebb integrálással)! Segítség: egy m várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete m^2.
3. Minden konvex $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez definiáljuk az $\mathcal{L}_f$ függvényteret, amelynek $L(x) = ax + b$ alakú elemei olyan függvények, hogy grafikonjuk teljes egészében f grafikonja alatt van. Ennek segítségével lássuk be a feltételes várhatóérték Jensen-egyenlőtlenségét:

$$\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{F}) \geq f(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})).$$

Házi feladatok

10. feladatsor, beadási határidő: 2017. április 26.

1. A ketyeregyár n darab ketyerét gyártott, mindegyik ψ valószínűséggel hibás. A minőségellenőrzés minden hibás ketyeréről δ valószínűséggel állapítja meg, hogy hibás. Jelölje X a hibás ketyerék számát, Y pedig a minőségellenőrzés által hibásnak nyilvánítottak számát. Mutassa meg, hogy
$$\mathbf{E}(X|Y) = \frac{n\psi(1-\delta) + (1-\psi)Y}{1-\delta\psi}$$

2. Legyen X és Y együttesen folytonos valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}e^{-(x^2-xy+y^2)/2}.$$
Számítsuk ki $\mathbf{E}[X|Y]$-t!

3. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek és azonos eloszlásúak és ν tőlük független $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változó. Legyen $Y = \sum_{k=1}^{\nu} X_k$. Fejezzük ki $\mathrm{var}(Y)$ értékét $\mathbf{E}(X_1)$, $\mathbf{E}(\nu)$, $\mathrm{var}(X_1)$, $\mathrm{var}(\nu)$ segítségével! *Segítség:* A végeredményt már tudjuk, lásd D/31 dia, 2. pont.

4. Lássuk be, hogy a feltételes várható érték E diasor 20. diáján lévő definíciójában a (b) pont kicserélhető a következő (b*) feltételre:
(b*) $\forall Y \in \mathcal{F}$
$$\int_\Omega YZd\mathbf{P} = \int_\Omega YXd\mathbf{P}.$$
Segítség: Közelítsük Y-t "lépcsősfüggvényekkel"!

5+6. Legyenek X, Y valószínűségi változók $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$-n, $\mathcal{F}$ pedig $\mathcal{A}$ rész σ-algebrája. Lássuk be a feltételes várható érték alábbi tulajdonságait! (a+c - 1 pont, b+d - 1 pont)

   (a) Linearitás: $\mathbf{E}[aX + bY|\mathcal{F}] = a\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] + b\mathbf{E}[Y|\mathcal{F}]$,

   (b) Monotonitás: $X \le Y$, akkor $\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] \le \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}]$,

   (c) Csebisev-egyenlőtlenség: $\mathbf{P}(|X| \ge a|\mathcal{F}) \le a^{-2}\mathbf{E}[X^2|\mathcal{F}]$,

   (d) $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty}\Omega_i$ diszjunkt unió és $\mathbf{P}(\Omega_i) > 0$. Legyen $\mathcal{F}$ az Ω_i által generált σ-algebra. Ekkor $\mathbf{E}[X|\mathcal{F}] = \sum_i \frac{\mathbf{E}[X \cdot \mathbf{1}_{\Omega_i}]}{\mathbf{P}(\Omega_i)}\mathbf{1}_{\Omega_i}$,