Sztochasztikus folyamatok
11. feladatsor, 2017. április 26./május 3.

1. Egy urnában piros és kék golyók vannak. Kezdetben egy-egy mindkét színből. Minden egyes $n \in \mathbb{N}$ diszkrét időpontban kihúzunk egy véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kiválasztott golyót az urnából, majd visszatesszük a kihúzottat és még egy ezzel azonos színű golyót is beteszünk az urnába. Így az n-edik menet után $n+2$ golyó lesz az urnában. Jelöljük β_n-nel, illetve ρ_n-nel az első n húzás során kihúzott piros, illetve kék golyók számát. ($\beta_0 = \rho_0 = 0$ és $\beta_n + \rho_n = n$. Az n-edik húzás után β_{n+1}, illetve ρ_{n+1} piros, illetve kék golyó van az urnában.) A folyamat természetes filtrációja legyen $\mathcal{F}_n$. Legyen $M_n := (\beta_n + 1)/(n+2)$ az urnában lévő piros golyók aránya az n-edik menet után.
   (a) Bizonyítsuk be, hogy M_n martingál!
   (b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{P}(\beta_n = k) = 1/(n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Azaz a piros/kék golyók száma minden egyes lépés után egyenletes eloszlású.
   (c) A martingál konvergencia tételből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} M_n =: M_\infty$ egy valószínűséggel létezik. Milyen eloszlású M_∞?

2. *Diszkrét idejű Doob-Meyer-dekompozíció* Egy $Y_1, Y_2, \ldots$ sztochasztikus folyamatról azt mondjuk, hogy jósolható az $\left(\mathcal{F}_n\right)_{n=0}^{\infty}$ filtrációra nézve, ha Y_n mérhető $\mathcal{F}_{n-1}$-re nézve ($\mathcal{F}_0$ legyen a triviális szigma-algebra). Lássuk be, hogy ha az $X_1, X_2, \ldots$ az $\mathcal{F}_n$-hez adaptált sztochasztikus folyamatra teljesül $\mathbf{E}(|X_n|) < +\infty$, akkor X_n egyértelműen állítható elő egy jósolható Y_n folyamat és egy 0 várható értékű M_n martingál összegeként.

3. *A log-optimális portfólió* Az n-edik fogadás során egységnyi fogadási összeg nyereménye ξ_n, ahol $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(\xi_n = +1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_n = -1) = q$, $q + p = 1$, $p > 1/2$. Magyarul: $q < 1/2$ valószínűséggel elveszítjük a befizetett összeget és $p = 1 - q > 1/2$ valószínűséggel a dupláját nyerjük vissza. Az n-edik fogadás során C_n összegre fogadunk. Y_0 a kezdeti vagyonunk és Y_n-el jelöljük az n-edik fogadás eredményhirdetése utáni teljes vagyonunkat. Nyilván: $0 \le C_n \le Y_{n-1}$, $n > 0$. Célunk: rögzített N számú fogadás során maximalizálni az $\mathbf{E}(\log Y_N - \log Y_0)$ *várható nyereség rátánkat.* $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ a folyamat természetes filtrációja.
   (a) Lássuk be, hogy tetszőleges *jósolható* C_n fogadási stratégia mellett $Z_n := \log Y_n - n\alpha$ szupermartingál, ahol $\alpha = p \log p + q \log q + \log 2$. Ebből következik, hogy $\mathbf{E}(\log Y_N - \log Y_0) \le N\alpha$.
   (b) Ám létezik olyan fogadási stratégia, amely mellett a fenti Z_n martingál. Tehát a várható nyereség ráta fenti optimális felső korlátja megfelelő stratégia választással elérhető.

Házi feladatok

+1. feladatsor, beadási határidő: 2017. május 3., utólagos beadási határidő: 2017. május 10. 23:59

1. Legyen $M_1, M_2, \ldots$ martingál az $\left(\mathcal{F}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ filtrációra nézve.
   Legyen $\mathcal{G}_k = \sigma(M_1, M_2, \ldots, M_k)$ az általuk generált természetes filtráció. Mutassuk meg, hogy M_n martingál $\left(\mathcal{G}_n\right)_{n=1}^{\infty}$-re nézve is.

2. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ homogén Markov lánc a véges S állapottéren, aminek az átmenetmátrixa P. Legyen $f : S \mapsto \mathbb{R}$.
$$\mathbb{E}(f(X_n)|\sigma(X_1, \ldots ; X_{n-1})) =?$$

3. Legyen X_i, $i = 1, 2, \ldots$ véges várhatóértékű valószínűségi változók sorozata adaptált az $\{\mathcal{F}\}_{n=1}^{\infty}$, filtrációra nézve, ahol $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Lássuk be, hogy a
$$M_0 := 0,\ \ M_n := \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i|\mathcal{F}_{i-1}))$$
   valószínűségi változó sorozat nulla várhatóértékű martingál.

4. m (1-től m -ig számozott) golyót helyezünk el k (1-től k-ig számozott) urnában. Diszkrét időegységenként véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kiválasztunk egy golyót, kiemeljük a helyéről és áthelyezzük egy másik urnába, melyet véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választunk ki. Legyen X_n az első urnában lévő golyók száma az n-edik lépés után és $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
   (a) Határozzuk meg $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$-et.
   (b) Értelmezzünk $Z_n = c_n X_n + d_n$, $c_n \neq 0$ valószínűségi változókat, melyek martingált alkotnak $\mathcal{F}_n$-re nézve.

5. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ az $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ filtrációhoz adaptált valószínűségi változó sorozat és a_n, b_n valós számok sorozata. Tegyük fel, hogy
$$\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = a_n X_n + b_n.$$
   Találjunk A_n, B_n valós szám sorozatot úgy, hogy $Z_n := A_n X_n + B_n$ martingál legyen.

6. Legyen Z_n, $n = 0, 1, 2 \ldots$ elágazó folyamat. Tegyük fel, hogy egy szülő gyermekei számának μ várható értéke és σ^2 szórásnégyzete véges. Jelöljük $\mathcal{F}_n$-nel a természetes filtrációt.
   (a) Bizonyítsuk be, hogy
$$M_n := \frac{Z_n}{\mu^n}$$
   martingál.
   (b) Bizonyítsuk be, hogy
$$\mathbf{E}(Z_{n+1}^2 \,|\, \mathcal{F}_n) = \mu^2 Z_n^2 + \sigma^2 Z_n.$$

(c) A (b) pontbeli eredmény felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$N_n := M_n^2 - \frac{\sigma^2}{\mu^{n+1}} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} M_n$$

szintén martingál.
(d) Az előző pont eredményének felhasználásával bizonyítsák be, hogy $\mu > 1$ esetén az M_n martingál egyenletesen korlátos L^2-ben (azaz $\sup_n \mathbf{E}(M_n^2) < \infty$), míg $\mu \leq 1$ esetén $\mathbf{E}(M_n^2) \to \infty$. A szuperkritikus elágazó folyamatokból származtatott martingál L^2-korlátossága akkor jön jól, ha be akarjuk látni, hogy az M_n martingál majdnem biztosan konvergál egy M_∞ valószínűségi változóhoz.