GÖDEL NEMTELJESSÉGI TÉTELKÖR

3. javított verzió

Vázlat

Serény György

BME Algebra Tanszék

2009

Ez az előadásvázlat a BME matematikus hallgatóinak 2005 tavaszán tartott *Gödel tételkör, bizonyításelmélmélet* c. tárgy anyagának javított változatát tartalmazza. Köszönet illeti meg az előadást látogató hallgatókat (különösen Breuer Jánost, Horváth Illést, Kőrösi Attilát és Zsbán Ambrust) kérdéseikért és lényegi észrevételeikért, melyek sok hiba kijavítására adtak lehetőséget.

Budapest, 2009 február   Serény György

Tartalom

1. Kiszámíthatóság

1.1 A szorzótábla

1.2 Definiálhatóság

1.3 Reprezentálhatóság

1.4 Minimalizálás

1.5 Helyettesítés

1.5.1 Helyettesítés és definiálhatóság

1.5.2 Helyettesítés és reprezentálhatóság

1.6 Rekurzivitás és reprezentálhatóság

2. A szintakszis aritmetizálása

2.1 A fundamentális konstruktív relációk

2.2 Gödel számozás

2.3 A szintaxis konstruktivitása

Termek

Formulák

Bizonyítás

2.4 Az aritmetika önreferencialitása

2.5 Eldönthetőség

3. A limitációs tételek

3.1 A Diagonális lemma

3.2 Gödel, Tarski és Church tételei

3.3 Két következmény

1. Kiszámíthatóság

1.1 A szorzótábla

Definíció

- $\underline{\omega} \mathrel{\mathring{=}} \langle \omega, 0, s, +, \cdot, \mathsf{exp}, < \rangle$ és $\mathcal{L}_A$ az $\underline{\omega}$ nyelve.
- $x^y \mathrel{\mathring{=}} \mathsf{exp}(x, y)$, $x \leq y \mathrel{\mathring{=}} x<y \vee x=y$
- $\underline{0} \mathrel{\mathring{=}} 0$, $\underline{n+1} \mathrel{\mathring{=}} s\,\underline{n}$
  Az $\underline{n}$ termeket **számtermeknek** nevezzük.

Állítás

- $\underline{n}^{\underline{\omega}} = n$
- $t \in \mathcal{T}m$, $\mathrm{var}(t) = 0 \rightsquigarrow$ van $n \in \omega$, hogy $t^{\underline{\omega}} = n$.
- $n = m \rightsquigarrow \vdash \underline{n} = \underline{m}$.

[Triviális indukció ill. első identitásaxióma.]

Definíció

A természetes számok műveleti táblája (röviden: **a szorzótábla**) az a $\boldsymbol{Q_0}$ elmélet, melynek elemei minden $n, m \in \omega$ esetén a következő mondat*sémák*:

$\alpha_1 \mathrel{\mathring{=}} \underline{n+m} = \underline{n} + \underline{m}$

$\alpha_2 \mathrel{\mathring{=}} \underline{n \cdot m} = \underline{n} \cdot \underline{m}$

$\alpha_3 \mathrel{\mathring{=}} \underline{n^m} = \underline{n}^{\underline{m}}$

$\alpha_4 \mathrel{\mathring{=}} \underline{n} < \underline{m}$ amennyiben $n < m$

$\alpha_5 \mathrel{\mathring{=}} \underline{n} \not< \underline{m}$ amennyiben $n \not< m$

$\alpha_6 \mathrel{\mathring{=}} (\forall x)(x \leq \underline{n} \iff x = \underline{0} \vee x = \underline{1} \vee \ldots \vee x = \underline{n})$

$\alpha_7 \mathrel{\mathring{=}} (\forall x)(x \leq \underline{n} \vee \underline{n} \leq x)$

Állítás

(i) $Q_0 \vdash (\forall x)(x \geq \underline{0})$

(ii) $Q_0 \vdash (\forall x)(x \neq \underline{n} \iff x < \underline{n} \vee \underline{n} < x)$

(iii) $Q_0 \vdash (\forall x)(\underline{n} \not< x \iff x < \underline{n} \vee x = \underline{n})$

(iv) $Q_0 \vdash (\forall x)(x < \underline{n} \Longrightarrow x = \underline{0} \vee x = \underline{1} \vee \ldots \vee x = \underline{n-1})$ amennyiben $n > 0$

(v) $Q_0 \vdash (\forall x)(x \not< \underline{0})$

[(i): $Q_0 \underset{\alpha_{6,7}}{\vdash} x = \underline{0} \vee \underline{0} \leq x$,
(ii): Egyik irány α_7, másik irány pl.: $Q_0 \cup \{x < \underline{n}, x = \underline{n}\} \vdash x < \underline{n} \wedge x = \underline{n} \underset{id.ax}{\vdash} n < n \underset{\alpha_5}{\vdash} \mathbb{F}$.
(iii): Egyik irány α_7, másik irány pl.: $Q_0 \cup \{x < \underline{n}, \underline{n} < x\} \vdash x \leq n \wedge \underline{n} < x \vdash$
$\underset{\alpha_6}{\vdash} (x = \underline{0} \wedge \underline{n} < x) \vee \ldots \vee (x = \underline{n} \wedge \underline{n} < x) \underset{id.ax}{\vdash} \underline{n} < \underline{0} \vee \ldots \vee \underline{n} < \underline{n} \underset{\alpha_5}{\vdash} \mathbb{F}$

(iv) : α_6-ból triviális mert (ii)-vel $Q_0 \vdash x < \underline{n} \Rightarrow x \neq \underline{n}$

(v) : $Q_0 \vdash x < \underline{0} \underset{(ii),(iii)}{\rightsquigarrow} Q_0 \vdash x \neq \underline{0} \wedge x \not> \underline{0} \rightsquigarrow Q_0 \vdash x \not\geq \underline{0} \underset{(i)}{\rightsquigarrow} Q_0 \vdash \mathbb{F}$]

Állítás

$\underline{\omega} \models Q_0$ így Q_0 konzisztens.

Lemma

$\underline{\omega} \models \sigma \rightsquigarrow Q_0 \vdash \sigma$ tetszőleges $\sigma \in \mathcal{A}t \cap \mathcal{S}n$ esetén. [1]

[σ komplexitására vonatkozó triviális indukció.]

Következmény

$t \in \mathcal{T}m$, $\operatorname{var}(t) = 0 \rightsquigarrow$

- $t^{\underline{\omega}} = n \rightsquigarrow Q_0 \vdash t = \underline{n}$ [2]
- van $n \in \omega$, hogy $Q_0 \vdash t = \underline{n}$
- $Q_0 \vdash (\forall x)(x \neq t \iff x < t \vee t < x)$
- $Q_0 \vdash (\forall x)(t \not< x \iff x < t \vee x = t)$

Megjegyzés

Ezek után már nem lesz szükségünk ω elemeinek és a nekik megfelelő termek megkülönböztetésére (hisz az, hogy melyikről van szó, a kontextusból mindig egyértelműen kiderül), tehát az aláhúzással való jelölést a legtöbb esetben elhagyjuk. Továbbá, erősen használni fogjuk azt az elemi elsőrendű logikai tényt[3], hogy (már az aláhúzás nélküli jelölést használva) minden $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ és $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \omega$ −ra:

$$\underline{\omega} \models \varphi[n_1, n_2, \ldots, n_m] \quad \text{iff} \quad \underline{\omega} \models \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m) \,.$$

Feladat

(1) Mutassuk meg, hogy $Q_0 \not\vdash (\forall x)(x + 0 = x)$

(2) Mutassuk meg, hogy $Q_0 \subseteq \operatorname{Ded} Q$, ahol Q a Robinson-aritmetika.

---

[1] Pl. $\underline{\omega} \models \underline{n}\,(\underline{m} + \underline{k}) = \underline{n}\,\underline{m} + \underline{n}\,\underline{k} \rightsquigarrow n(m+k) = nm + nk \rightsquigarrow \underline{n(m+k)} = \underline{nm+nk} \overset{\text{4.old. Első Áll.}}{\rightsquigarrow} Q_0 \vdash \underline{n}\,(\underline{m} + \underline{k}) = \underline{n(m+k)} = \underline{nm+nk} = \underline{n}\,\underline{m} + \underline{n}\,\underline{k}$. Ha az atomi formula $t_1 < t_2$ alakú, akkor a hivatkozás az 4.old. első Áll. helyett persze az α_4 −re kell hivatkoznunk.

[2] $t^{\underline{\omega}} = n \rightsquigarrow \underline{\omega} \models t = \underline{n} \rightsquigarrow Q_0 \vdash t = \underline{n}$

[3] **Állítás.** Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges nyelv, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ zárt termjei $\mathcal{L}$ −nek, $\varphi = \varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ pedig $\mathcal{L}$ tetszőleges formulája. Ekkor $\mathfrak{A} \models \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ iff $\mathfrak{A} \models \varphi[t_1^{\mathfrak{A}}, t_2^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}]$. (Ez a helyettesítési lemma zárt termekre vonatkozó speciális esete.)

Pl. $\varphi = \varphi(v_1, v_2) = v_1 < v_2$: $\underline{\omega} \models \varphi(n, m)$ iff $\underline{\omega} \models n < m$ iff $n < m$ iff $\underline{\omega} \models (v_1 < v_2)[n, m]$

1.2 Definiálhatóság

Jelölés

- $\boldsymbol{(\forall x<t)\varphi} \doteq (\forall x)(x < t \Longrightarrow \varphi)$, $\boldsymbol{(\exists x<t)\varphi} \doteq (\exists x)(x < t \wedge \varphi)$. (Korlátos kvantorok)
- $\varphi \cong \psi \ \doteq \ Q_0 \vdash \varphi \Longleftrightarrow \psi$, $\qquad \varphi \simeq \psi \ \doteq \ \underline{\omega} \models \varphi \Longleftrightarrow \psi \qquad$ (Q_0 ill. ω–ekvivalencia)

Definíció

- Legyen $m \in \omega$, $m > 0$, $R \subseteq \omega^m$. $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ **definiálja** R–et ha

$$(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in R \quad \text{iff} \quad \underline{\omega} \models \varphi[n_1, n_2, \ldots, n_m]$$

minden $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \omega$ esetén és R **definiálható** ha van R–et definiáló φ formula.

- $\boldsymbol{\Delta_0} \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}_A}$ az a legszűkebb formulahalmaz, mely
  (1) tartalmazza az összes atomi formulát
  (2) a φ és ψ formulákkal együtt tartalmazza a $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, valamint az $x \notin \mathrm{var}(t)$ esetben a $(\forall x < t)\varphi$ és a $(\exists x < t)\varphi$ formulákat is.

- $\boldsymbol{\Sigma^*} \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}_A}$ az a legszűkebb formulahalmaz, melyre igaz, hogy
  (1) $\Delta_0 \subseteq \Sigma^*$
  (2) a φ és ψ formulákkal együtt tartalmazza a $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ és $(\exists x)\varphi$, továbbá az $x \notin \mathrm{var}(t)$ esetben a $(\forall x < t)\varphi$ és a $(\exists x < t)\varphi$ formulákat is

- $\boldsymbol{\Sigma} \doteq \{\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}_A} : \varphi \cong \psi \text{ valamely } \psi \in \Sigma^* \text{ esetén}\}$

- $\boldsymbol{\Sigma_1} \doteq \{\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}_A} : \varphi = (\exists x)\psi \text{ valamely } \psi \in \Delta_0 \text{ esetén}\}$

- $\boldsymbol{\Delta^w} \doteq \{\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}_A} : \varphi \simeq \psi,\ \neg\varphi \simeq \psi' \text{ valamely } \psi, \psi' \in \Sigma\}$

- Legyen $m \in \omega$, $m > 1$ tetszőleges.

$\boldsymbol{\Delta^*_m} \doteq \{\varphi : \varphi = v_m < t \wedge \psi \text{ valamely } \psi = \psi(v_1, \ldots, v_m) \in \Delta_0,\ t = t(v_1, \ldots, v_{m-1}) \in \mathcal{T}m_{\mathcal{L}_A}\text{–re}\}$

Legyen $m \in \omega, m > 0$ és $R \subseteq \omega^m$ tetszőleges és legyen Ω a $\Delta_0, \Sigma, \Sigma_1, \Delta^w, \Delta^*_m$ bármelyike. Ω elemei az Ω–formulák, ill. (ha mondatok) az Ω–mondatok. Az Ω–relációk vagy Ω–definiálható relációk az Ω–formulával definiálható relációk. Egy függvény Ω–függvény ha Ω–reláció. A Δ_0, Σ, Δ^w, Δ^*_{m+1}–relációk (függvények) neve rendre **konstruktív**, **rekurzíve(van) felsorolható**, **rekurzív** ill. **term–korlátos** relációk (függvények).

Megjegyzés

Az, hogy a Δ_0–relációk intuitíve valóban "konstruktív" relációk abból következik, hogy – mint látni fogjuk – a Δ_0–relációk mind *elemien rekurzívak*, ami azt jelenti, hogy karakterisztikus függvényeik ($\chi_R(n_1, n_2, \ldots n_k) = 1$ ha $(n_1, n_2, \ldots n_k) \in R$, $\chi_R(n_1, n_2, \ldots n_k) = 0$ egyébként) bizonyos egyszerű (és ezért intuitíve konstruktív) függvényekből (pl. az összeadásból, szorzásból, stb.) megintcsak intuitíve a konstruktivitást megőrző transzformációkkal (mint pl. a kompozíció) jönnek létre. Másszóval, a Δ_0–relációk karakterisztikus függvényei "zárt alakban", egy "képlet" segítségével megadhatóak, tehát – szemben a (csupán) kiszámítható relációkkal, melyekről csak annyit tudunk, hogy számítási algoritmusunk "előbb–utóbb" eredményre vezet) – "konstruktívan", "direkten" kiszámíthatóak, azaz (a képlet alapján egy adott input esetén) "előre meg lehet mondani, hogy legfeljebb mennyi időt vesz igénybe a kiszámításuk". Kérdés, hogy vajon a konstruktivitás felel–e meg a kiszámíthatóság intuitív fogalmának, vagy van még más gyengébb fogalom is ?

Másrészt, a Σ– relációk intuitíve azok a relációk, melyeknek elemeit fel tudjuk sorolni, van az elemeiket felsoroló algoritmus. Valóban, ahogy alább látni fogjuk, triviális indukcióval könnyen belátható, hogy minden Σ– reláció Σ_1 – reláció. (Fordítva egyébként triviális.) Nomármost, (az egyszerűség kedvéért egy változóra szorítkozva), tegyük fel, hogy R–et a $\psi(v_1) = (\exists v_2)\varphi(v_1, v_2)$ formula definiálja, ahol $\varphi(v_1, v_2) \in \Delta_0$. Cantor féle "mellékátlós módszerrel" felsorolva az (n, m) számpárokat, mindegyikre eldöntjük, hogy vajon $\varphi(n, m)$ igaz – e $\underline{\omega}$ – n (ez $\varphi \in \Delta_0$ miatt konstruktívan megtehető) és amennyiben igaz, akkor n – et felvesszük a listára (és persze a továbbiakban nem vizsgáljuk azokat a számpárokat, melyeknek első eleme n). Ez az algoritmus nyilván egy olyan listát eredményez, melyen R minden eleme szerepel és csak ezek szerepelnek. Persze ez az algoritmus nem dönti el, hogy valamely n eleme – e R – nek, hiszen sohasem tudhatjuk vajon sorra fog – e kerülni, vagy sem.
A Σ^* – relációknak csak technikai szerepük van, kényelmesebbé teszik a Σ – relációk definiálását. Végül, ami a rekurzív relációkat illeti, definíciójuk szerint ezek olyan rekurzíve felsorolható relációk, melyek komplementere is rekurzíve felsorolható reláció. Fentiek alapján ezek komplementereikkel együtt valóban felsorolhatóak, így intuitíve valóban kiszámíthatóak, hiszen az ilyen relációk esetén előbb - utóbb minden elem felbukkan vagy a reláció elemeiből vagy pedig a komplementer elemeiből alkotott listán, eldöntve, hogy a vizsgált szám(n – es) eleme – e a relációnak. (Persze egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ez már tényleg az intuitív kiszámíthatóságnak megfelelő formális fogalom.)

A további vizsgálataink szempontjából tartalmilag legfontosabb három formulaosztály a Δ_0, Σ és Δ^w osztályok. Ezek azok az osztályok, melyek az effektív (hatékony) kiszámíthatóság különböző fokozatait formalizálják. Tulajdonságaik közül a leglényegesebbek a közvetlenül triválisan belátható tartalmazási és zártsági viszonyaik:

- Σ zárt a $\cong$ – ra. [4]
- Δ_0, és Σ tartalmazza az atomi formulákat, $\Delta_0 \subseteq \Sigma$. [5]
- Δ_0 – nak a logikai konnektívumokra vonatkozó zártsági tulajdonságai: mindenre zárt kivéve a (nemkorlátos) kvantorokat, Σ nem zárt a $\neg$ – re és az univerzális kvantorra, minden másra, közte a $\exists$ – re is, zárt. [6]
- Δ_0, és Σ zárt a változóknak egy, a formulában elő nem forduló változóra illetve számtermre való helyettesítésére.[7]
- A fenti állításokban Δ_0 kicserélhető Δ^w -re. [8]

[4] $\cong$ tranzitív.
[5] $\Delta_0 \subseteq \Sigma^* \subseteq \Sigma$.
[6] Σ (persze csak a pozitív állítások fontosak): Σ^* definíció szerint zárt az adott konnektívumokra és $\cong$ ezekre nézve kongruencia–reláció, azaz pl. $\varphi \cong \varphi' \in \Sigma^*, \psi \cong \psi' \in \Sigma^* \rightsquigarrow \varphi \wedge \psi \cong \varphi' \wedge \psi' \in \Sigma^*$.
[7] $\bullet$ Δ_0: trivi, $\bullet$ Σ: $\varphi \in \Sigma \rightsquigarrow \varphi_t^x \cong (\exists x)(x = t \wedge \varphi) \in \Sigma \rightsquigarrow \varphi_t^x \in \Sigma$.
[8] **(a)** $\simeq$ tranzitív és kongruencia $\neg$ – re; $\cong \subseteq \simeq$ **(b)** $\Delta_0 \subseteq \Sigma^* \subseteq \Sigma$. **(c)** A $\neg$ – re való zártság a kettős tagadás és a $\simeq$ – ra való zártság közvetlen következménye; az $\wedge$ – re, $\vee$ – ra és a korlátos kvantorokra való zártság de Morgannal ebből és Σ – nak az adott konnektívumokra vonatkoó zártságából adódik. Pl.
$$\varphi \simeq \eta, \neg\varphi \simeq \eta', \psi \simeq \mu, \neg\psi \simeq \mu', \eta, \eta', \mu, \mu' \in \Sigma \rightsquigarrow \varphi \wedge \psi \simeq \eta \wedge \mu \in \Sigma, \neg(\varphi \wedge \psi) \simeq \eta' \vee \mu' \in \Sigma$$
(d) $\varphi \simeq \psi \in \Sigma \rightsquigarrow \varphi_t^x \simeq (\exists x)(x = t \wedge \varphi) \simeq (\exists x)(x = t \wedge \psi) \in \Sigma$ és $\neg\varphi_t^x = (\neg\varphi)_t^x$.

Állítás
A Σ – relációk pontosan a Σ_1 – relációk. [9]

Lemma (INDUKCIÓS LÉPÉS A Σ – TELJESSÉGHEZ)
Legyen $\sigma, \tau \in \mathcal{S}n$ és $\varphi = \varphi(x)$ olyan, hogy

$$\underline{\omega} \models \sigma \rightsquigarrow Q_0 \vdash \sigma\,, \qquad \underline{\omega} \models \tau \rightsquigarrow Q_0 \vdash \tau\,, \qquad (\forall n \in \omega)\left[\underline{\omega} \models \varphi(n) \rightsquigarrow Q_0 \vdash \varphi(n)\right]$$

Legyen továbbá $t \in \mathcal{T}m$ olyan, hogy $\mathrm{var}(t) = 0$. Ekkor

(i) $\underline{\omega} \models \sigma \wedge \tau \rightsquigarrow Q_0 \vdash \sigma \wedge \tau$
(ii) $\underline{\omega} \models \sigma \vee \tau \rightsquigarrow Q_0 \vdash \sigma \vee \tau$
(iii) $\underline{\omega} \models (\exists x)\varphi \rightsquigarrow Q_0 \vdash (\exists x)\varphi$
(iv) $\underline{\omega} \models (\exists x < t)\varphi \rightsquigarrow Q_0 \vdash (\exists x < t)\varphi$
(v) $\underline{\omega} \models (\forall x < t)\varphi \rightsquigarrow Q_0 \vdash (\forall x < t)\varphi$

Bizonyítás.

(i) $\underline{\omega} \models \sigma \wedge \tau \rightsquigarrow \underline{\omega} \models \sigma$ és $\underline{\omega} \models \tau \rightsquigarrow Q_0 \vdash \sigma$ és $Q_0 \vdash \tau \rightsquigarrow Q_0 \vdash \sigma \wedge \tau$

(ii) $\underline{\omega} \models \sigma \vee \tau \rightsquigarrow \underline{\omega} \models \sigma$ vagy $\underline{\omega} \models \tau \rightsquigarrow Q_0 \vdash \sigma$ vagy $Q_0 \vdash \tau \rightsquigarrow Q_0 \vdash \sigma \vee \tau$

(iii) $\underline{\omega} \models (\exists x)\varphi \rightsquigarrow (\exists n \in \omega)\ \underline{\omega} \models \varphi[n] \rightsquigarrow \underline{\omega} \models \varphi(n) \rightsquigarrow Q_0 \vdash \varphi(n) \rightsquigarrow Q_0 \vdash (\exists x)\,\varphi$

(iv) $\underline{\omega} \models (\exists x < t)\varphi \rightsquigarrow \underline{\omega} \models (\exists x)(x < t \wedge \varphi) \rightsquigarrow (\exists n \in \omega)\,\underline{\omega} \models (x < t \wedge \varphi)[n] \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \underline{\omega} \models n < t$ és $\underline{\omega} \models \varphi(n) \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{5.old. Lemma}:\ n < t \in \mathcal{S}n \cap \mathcal{A}t}}{\rightsquigarrow} Q_0 \vdash n < t$ és $Q_0 \vdash \varphi(n) \rightsquigarrow Q_0 \vdash n < t \wedge \varphi(n) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow Q_0 \vdash (\exists x)(x < t \wedge \varphi) \rightsquigarrow Q_0 \vdash (\exists x < t)\varphi$

(v) $(\exists m \in \omega)\, t^{\underline{\omega}} = m$. 5 .old. Következmény alapján: $t^{\underline{\omega}} = m \rightsquigarrow Q_0 \vdash t = m$.
Ebből $m = 0 \rightsquigarrow Q_0 \vdash t = 0 \underset{\downarrow}{\rightsquigarrow} Q_0 \vdash (\forall x < t)\varphi$. Tehát feltehető, hogy $m > 0$.

($\bigstar$) $Q_0 \vdash (\forall x < 0)\,\varphi$. Valóban, $\{x \not< 0, x < 0\} \vdash \mathbb{F} \vdash \varphi$ és $Q_0 \vdash x \not< 0$ (4 .o.Áll. (v))

$\underline{\omega} \models (\forall x < t)\varphi \rightsquigarrow \underline{\omega} \models (\forall x)(x < t \Longrightarrow \varphi) \rightsquigarrow (\forall n \in \omega)\,\underline{\omega} \models (x < t \Longrightarrow \varphi)[n] \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow (\forall n \in \omega)\left[\underline{\omega} \models n < t \rightsquigarrow \underline{\omega} \models \varphi(n)\right] \rightsquigarrow (\forall n \in \omega)\left[n < m \rightsquigarrow \underline{\omega} \models \varphi(n)\right] \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow (\forall n \in \omega)\left[n < m \rightsquigarrow Q_0 \vdash \varphi(n)\right] \rightsquigarrow (\forall n < m) Q_0 \vdash \varphi(n) \underset{\textit{első impl.ax}}{\rightsquigarrow}$
$\rightsquigarrow (\forall n < m)\left[Q_0 \vdash x = n \Longrightarrow (\varphi(n) \wedge x = n)\right] \rightsquigarrow (\forall n < m)\left[Q_0 \vdash x = n \Longrightarrow \varphi(x)\right] \rightsquigarrow$

---

[9] **(1):** $\Sigma_1 \subseteq \Sigma^* \subseteq \Sigma$. **(2):** Legyen $\Sigma_1^w \mathrel{\hat{=}} \{\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}_A} : \varphi \simeq \psi$ valamely $\psi \in \Sigma_1$ esetén$\}$. Nos, Σ_1^w konnektívumokra való zártsági tulajdonságai megegyeznek Σ^* – éival, azaz Σ_1^w zárt az $\wedge$ – re, a $\vee$ – ra, a $\exists$ – re és a korlátos kvantorokra. Valóban a korlátos univerzális kvantor kivételével ez következik abból, hogy $(\exists x)(\exists y)\varphi \simeq (\exists z)(\exists x < z)(\exists y < z)\psi$ mert bármely két természetes számhoz van mindkettőjüknél nagyobb és így pl. $\varphi \simeq (\exists x)\varphi^*, \psi \simeq (\exists y)\psi^* \rightsquigarrow \varphi \wedge \psi \simeq (\exists x)\varphi^* \wedge (\exists y)\psi^* \simeq (\exists x)(\exists y)(\varphi^* \wedge \psi^*)$, hisz feltehető, hogy $x \notin \mathrm{var}(\psi)$, $x \neq y \notin \mathrm{var}(\varphi)$. Másrészt $(\forall x < t)(\exists y)\varphi \simeq (\exists z)(\forall x < t)(\exists y < z)\psi$ hiszen ha *véges sok* (ti. $t^{\underline{\omega}} = n$ – nyi) szám mindegyikéhez van megfelelő, akkor van *véges sok* megfelelő úgy, hogy az eredetiek közül mindegyikhez jusson. Mivel nyilván $\Delta_0 \subseteq \Sigma_1^w$, így Σ_1^w egy azok közül a formulaosztályok közül, melyek közül Σ^* a legszűkebb, tehát $\Sigma^* \subseteq \Sigma_1^w$. Végül a Σ – relációk Σ^* – relációk ($\cong \subseteq \simeq$), így a Σ – relációk Σ_1^w – relációk és nyilván a Σ_1^w – beli formulákkal definiált relációk mind Σ_1 – relációk.

$\rightsquigarrow\ Q_0 \vdash x = 0 \Longrightarrow \varphi(x)$ és ... és $Q_0 \vdash x = m-1 \Longrightarrow \varphi(x) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow\ Q_0 \vdash \big(x = 0 \Longrightarrow \varphi(x)\big) \wedge \ldots \wedge \big(x = m-1 \Longrightarrow \varphi(x)\big) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow\ Q_0 \vdash (x = 0 \vee \ldots \vee x = m-1) \Longrightarrow \varphi(x) \underset{\text{4. o. Állítás (iv)}:\ m>0}{\rightsquigarrow} Q_0 \vdash x < m \Longrightarrow \varphi(x) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow\ Q_0 \vdash (\forall x)(x < m \Rightarrow \varphi) \rightsquigarrow Q_0 \vdash (\forall x{<}m)\,\varphi \rightsquigarrow Q_0 \vdash t = m \wedge (\forall x{<}m)\,\varphi \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow\ Q_0 \vdash (\forall x < t)\,\varphi$

QED

Tétel (A SZORZÓTÁBLA Σ – TELJES)

Minden igaz Σ–mondat bizonyítható Q_0 – ból, azaz

$$\Sigma \cap \mathrm{Th}\,\underline{\omega} \subseteq \mathrm{Ded}\,Q_0$$

Bizonyítás.

Elég belátni, hogy $\Sigma^* \cap \mathrm{Th}\,\underline{\omega} \subseteq \mathrm{Ded}\,Q_0$, azaz tetszőleges $\sigma \in \Sigma^*$ esetén

(*) $$\underline{\omega} \models \sigma \rightsquigarrow Q_0 \vdash \sigma$$

hiszen $\tau \in \Sigma \rightsquigarrow \tau \cong \tau' \in \Sigma^*$ valamely τ' – re és τ' – vel együtt τ – ra is fennáll (*), mert ekkor

$$\underline{\omega} \models \tau \rightsquigarrow \underline{\omega} \models \tau' \rightsquigarrow Q_0 \vdash \tau' \rightsquigarrow Q_0 \vdash \tau\ .$$

(*) – ot formulakomplexitásra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Mivel az előző Lemma alapján (*) igazsága invariáns az összes Σ^* – ot definiáló konnektívumra, elég megmutatni, hogy (*) igaz a Δ_0 – beli mondatokra.

Jelöljük tetszőleges $\varphi \in \Delta_0$ esetén $|\varphi|$ – val a φ – ban szereplő logikai konstansok számát és nevezzük ezt a számot a φ **hosszának**. $|\sigma|$ – ra való indukcióval megmutatjuk, hogy teszőleges $\sigma \in \mathcal{S}n \cap \Delta_0$ esetén fennáll (*).

(1) $|\sigma| = 0 \rightsquigarrow \sigma \in \mathcal{A}t$. Ekkor 1.1 – beli Lemma alapján készen vagyunk.

(2) Legyen most $k > 0$, $\sigma \in \Delta_0 \cap \mathcal{S}n$ tetszőleges, $|\sigma| = k$, és tegyük fel, hogy minden olyan $\tau \in \Delta_0 \cap \mathcal{S}n$ esetén fennáll (*), melyre $|\tau| < k$.

Ha σ $\wedge$ – el áll elő nála rövidebb mondatokból vagy a korlátos kvantorok valamelyikével áll elő egy nála rövidebb formulából, akkor az indukciós hipotézis éppen azt jelenti, hogy az előző Lemma feltételei fennállnak rá, tehát ezen Lemma (i), (iv) és (v) – el adódik, hogy (*) igaz rá. Következésképpen csak azt az esetet kell vizsgálnunk, amikor $\sigma = \neg\,\tau$. Δ_0 definíciója alapján öt eset van.

(a) $\tau \in \mathcal{A}t$, azaz $\tau = (t_1{=}t_2)$ vagy $\tau = (t_1{<}t_2)$

Itt az 1.1 utolsó Következményét használjuk:

$\tau = (t_1{=}t_2) \rightsquigarrow \sigma = \neg\,\tau = (t_1{\neq}t_2) \underset{\text{5 .o. Köv.}}{\cong} (t_1 < t_2) \vee (t_2 < t_1)$

$\tau = (t_1{<}t_2) \rightsquigarrow \sigma = \neg\,\tau = (t_1{\not<}t_2) \underset{\text{5 .o. Köv.}}{\cong} (t_2 < t_1) \vee (t_1{=}t_2)$

Mivel $t_1 < t_2$, $t_2 < t_1$, $t_1 = t_2 \in \mathcal{A}t$, (*) – gal és a Lemma (ii) – vel készen vagyunk, hisz (láttuk, hogy) (*) invariáns a Q_0 – ekvivalenciára.

(b) $\tau = \neg\,\vartheta$

$\tau = \neg\,\vartheta \;\rightsquigarrow\; \sigma = \neg\,\tau = \neg\,\neg\,\vartheta \cong \vartheta$

Mivel $|\tau| = k-1 \rightsquigarrow |\vartheta| = k-2 \rightsquigarrow$ indukciós hipotézissel ϑ – ra fennáll (*), ezért aztán ez igaz a vele Q_0 – ekvivalens σ – ra is.

(c) $\tau = \vartheta \wedge \xi$

$\tau = \vartheta \wedge \xi \;\rightsquigarrow\; \sigma = \neg\,\tau = \neg\,(\vartheta \wedge \xi) \cong \neg\,\vartheta \vee \neg\,\xi$

Mivel $|\tau| = k-1 \rightsquigarrow |\vartheta|$, $|\xi| \le k-2 \rightsquigarrow |\neg\,\vartheta|$, $|\neg\,\xi| \le k-1$, indukciós hipotézissel $\neg\,\vartheta$ – ra és $\neg\,\xi$ re fennáll (*), így Lemma (ii) – vel ez igaz $\neg\,\vartheta \vee \neg\,\xi$ – re és az ezzel Q_0 – ekvivalens σ – ra is.

(d) $\tau = (\forall x < t)\varphi(x)$, $\mathrm{var}(t) = 0$

$\tau = (\forall x < t)\varphi(x) \;\rightsquigarrow\; \sigma = \neg\,\tau = \neg\,(\forall x < t)\varphi(x) \cong (\exists x < t)\neg\,\varphi(x)$

Nos, $|\tau| = k-1 \rightsquigarrow |\varphi(x)| = k-2 \rightsquigarrow |\neg\,\varphi(x)| = k-1 \rightsquigarrow |\neg\,\varphi(n)| = k-1$ tetszőleges $n \in \omega$ – ra, így az indukciós hipotézissel bármely n – el $\neg\,\varphi(n)$ – re fennáll (*), tehát Lemma (iv) – el $(\exists x < t)\neg\,\varphi(x)$ – ra és az ezzel Q_0 – ekvivalens σ – ra is.

(e) $\tau = (\exists x < t)\varphi(x)$, $\mathrm{var}(t) = 0$

$\tau = (\exists x < t)\varphi(x) \;\rightsquigarrow\; \sigma = \neg\,\tau = \neg\,(\exists x < t)\varphi(x) \cong (\forall x < t)\neg\,\varphi(x)$

Nos, $|\tau| = k-1 \rightsquigarrow |\varphi(x)| = k-2 \rightsquigarrow |\neg\,\varphi(x)| = k-1 \rightsquigarrow |\neg\,\varphi(n)| = k-1$ tetszőleges $n \in \omega$ – ra, így az indukciós hipotézissel bármely n – el $\neg\,\varphi(n)$ – re fennáll (*), tehát Lemma (iv) – el $(\forall x < t)\neg\,\varphi(x)$ – ra és az ezzel Q_0 – ekvivalens σ – ra is.

QED

Következmény

Goldbach-tipusú állítások (Π_1-mondatok, azaz a $(\forall x)\varphi(x), \varphi \in \Delta_0$ alakú mondatok, ilyen pl. a névadó Goldbach-sejtés) igazak, ha függetlenek.

Feladat

Mutassunk példát olyan relációra, mely

(a) konstruktív

(b) rekurzív, de nem konstruktív

(c) rekurzíve felsorolható, de nem rekurzív

(d) definiálható, de sem ő, sem komplementere nem rekurzíve felsorolható

(e) nem definiálható.

1.3 Reprezentálhatóság

Definíció

Legyen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}_A}$.

(i) Γ **kiterjesztése** (vagy **bővítése**) $\Delta-$nak ha $\Delta \subseteq \mathrm{Ded}\,\Gamma$.

(ii) Γ **helyes** ha $\mathrm{Ded}\,\Gamma \subseteq \mathrm{Th}\,\underline{\omega}$ (azaz $\Gamma \vdash \sigma \rightsquigarrow \underline{\omega} \models \sigma$ minden $\sigma \in \mathcal{S}n_{\mathcal{L}_A}$ esetén).

Definíció

Legyen $m \in \omega$, $m > 0$.

- $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ **reprezentálja** $R \subseteq \omega^m-$et $\Gamma-$ban, ha minden $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \omega$ esetén

  (a) $\quad (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in R \rightsquigarrow \Gamma \vdash \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m)$

  (b) $\quad (n_1, n_2, \ldots, n_m) \notin R \rightsquigarrow \Gamma \vdash \neg\,\varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m)$

- $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ **gyengén reprezentálja** $R \subseteq \omega^m-$et $\Gamma-$ban, ha minden $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \omega$ esetén

  $$(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in R \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m)$$

- $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1})$ **funkcionálisan reprezentálja** $f : \omega^m \longrightarrow \omega-$t $\Gamma-$ban, ha minden $n_1, n_2, \ldots, n_m, k \in \omega$ esetén

  $f(n_1, n_2, \ldots, n_m) = k \rightsquigarrow$

  (a) $\Gamma \vdash \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m, k)$

  (b) $\Gamma \vdash (\forall v_{m+1})\big(\varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m, v_{m+1}) \Longrightarrow v_{m+1} = k\big)$

A Δ_0, Σ, Δ^*_m szimbólumok bármelyikét $\Omega-$val jelölve, az $\Omega-$reprezentálás valamely $\varphi \in \Omega-$val való reprezentálást jelent.

Állítás

Legyen Γ Q_0 tetszőleges kiterjesztése. Ha a φ formula funkcionálisan reprezentálja az $f : \omega^m \longrightarrow \omega$ függvényt $\Gamma-$ban, akkor reprezentálja is $\Gamma-$ban $f-$et.

[(b) $(n_1, n_2, \ldots, n_m, k) \notin f \rightsquigarrow f(n_1, n_2, \ldots, n_m) \neq k \rightsquigarrow f(n_1, n_2, \ldots, n_m) = l$ és $l \neq k$ valamely $l \in \omega-$ra $\underset{l \neq k \in \Delta_0}{\rightsquigarrow} \Gamma \vdash \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m, k) \Longrightarrow k = l$ és $\Gamma \vdash l \neq k \rightsquigarrow \Gamma \vdash \neg\,\varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m, k)$.]

Állítás

Legyen Γ tetszőleges konzisztens elmélet. A φ formula reprezentálja az $R \subseteq \omega^m$ relációt $\Gamma-$ban iff φ és $\neg\,\varphi$ gyengén reprezentálja $R-$et ill. $\omega^m \sim R-$et $\Gamma-$ban.

[Az elégségesség triviális, a szükségességből csak az egyiket bizonyítjuk, lévén a másik tökéletesen analóg.
$\Gamma \vdash \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ és $(n_1, n_2, \ldots, n_m) \notin R \rightsquigarrow \Gamma \vdash \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m)$
és $\Gamma \vdash \neg\,\varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ $\lightning$ Γ konzisztens]

Állítás (DEFINIÁLHATÓSÁG ÉS REPREZENTÁLHATÓSÁG)

Legyen Γ tetszőleges helyes kiterjeszése Q_0 – nak.

(i) $\varphi \in \Sigma$ definiálja R – et iff gyengén reprezentálja R – et Γ – ban.

(ii) $\varphi \in \Delta_0$ definiálja R – et iff reprezentálja R – et Γ – ban.

$$[\ \Gamma \vdash \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m) \rightsquigarrow \Gamma \models \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m) \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow \underline{\omega} \models \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m) \rightsquigarrow Q_0 \vdash \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m) \rightsquigarrow \Gamma \vdash \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_m)\ ]$$

Megjegyzés

A továbbiakban, ha mást nem mondunk, (gyenge) (funkcionális) reprezentáláson vagy reprezentálhatóságon mindig Q_0 – ban való (gyenge) (funkcionális) reprezentálást vagy reprezentálhatóságot értünk. Mivel persze Q_0 helyes kiterjesztése Q_0 – nak, azaz erre a fenti Állítás alapján a Σ – definiálhatóság és Σ – reprezentálhatóság ekvivalenciája fennáll.

1.4 Minimalizálás

Definíció

(i) Legyen $R \subseteq \omega^{m+1}$ olyan, hogy tetszőleges $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \omega$ esetén van $l \in \omega$, melyre $(n_1, n_2, \ldots, n_m, l) \in R$.

$\mathsf{min}_m R \stackrel{\circ}{=} \big\{ (n_1, n_2, \ldots, n_m, k) \in \omega^{m+1} \ : \ k = \min\{l \in \omega \ : (n_1, n_2, \ldots, n_m, l) \in R\} \big\}$

(ii) Legyen $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1})$ tetszőleges.

$\mathsf{min}_m \varphi \ \stackrel{\circ}{=} \ \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}) \ \wedge \ (\forall v_k)\big(v_k < v_{m+1} \Longrightarrow \neg\, \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m, v_k)\big),$

ahol v_k az a legkisebb, de $m + 1-$nél nagyobb indexű változó, mely nem fordul elő $\varphi-$ben.

Megjegyzés

(i) Fontos hangsúlyozni, hogy a fenti Definíció (i) – ben szereplő globalitási feltétel lényeges. Ennek megfelelően függvényen is mindig globális, azaz mindenütt, az egész $\omega-$án értelmezett függvényt értünk.

(ii) A definíciók nyilvánvaló következményeként

(a) Ha $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1})$ és $\psi = \mathsf{min}_m \varphi$, akkor $\psi = \psi(v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1})$.

(b) $\mathsf{min}_m R \, : \omega^m \longrightarrow \omega$.

(c) Ha $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1})$ definiálja R–et, akkor $\mathsf{min}_m \varphi$ definiálja $\mathsf{min}_m R$–et.

(iii) $\mathsf{min}_m R$ legelterjedtebb jelölése: $\mu k R(n_1, n_2, \ldots, n_m, k)$.

Állítás

Tetszőleges $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1})$ esetén

$$\varphi \in \Delta_0 \ \rightsquigarrow \ \mathsf{min}_m \varphi \in \Delta_0 .$$

[$\mathsf{min}_m \varphi \ = \ \varphi \wedge (\forall v_k < v_{m+1}) \neg\, \varphi\,^{v_{m+1}}_{v_k}$ és Δ_0 zárt az ebben szereplő helyettesítésre és konnektívumokra.]

Következmény

A konstruktívitás zárt a minimalizációra.

Tétel

Legyen $R \subseteq \omega^{m+1}$ olyan, hogy tetszőleges $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \omega$ esetén van $l \in \omega$, melyre $(n_1, n_2, \ldots, n_m, l) \in R$. Ha $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1})$ reprezentálja $R-$et, akkor $\mathsf{min}_m \varphi$ funkcionálisan reprezentálja $\mathsf{min}_m R-$et.

Bizonyítás.

Az egyszerűség és áttekinthetőség kedvéért csak egy változóra ($m = 1$) hisz az általános eset nyilván teljesen analóg. Az alkalmazott változók: x, y, z. Legyen $\varphi = \varphi(x, y)$ az a formula, mely reprezentálja R–et:

(1) (a) $(n, k) \in R \ \rightsquigarrow \ Q_0 \vdash \varphi(n, k)$

(b) $(n, k) \notin R \ \rightsquigarrow \ Q_0 \vdash \neg\, \varphi(n, k)$

Legyen

(2) $$\psi = \psi(x,y) = \varphi(x,y) \,\wedge\, (\forall z)\big(z < y \Longrightarrow \neg\,\varphi(x,z)\big)$$ [10]

és legyen $f \stackrel{\circ}{=} \mathsf{min}_1\, R$. Megmutatjuk, hogy ψ funkcionálisan reprezentálja f–t, azaz

(3) $f(n) = k \rightsquigarrow$

(a) $Q_0 \vdash \psi(n,k)$

(b) $Q_0 \vdash (\forall y)\big(\psi(n,y) \Longrightarrow y = k\big)$

(4) Legyen tehát $f(n) = k$. Ekkor $(n,k) \in R$.

(A) Először megmutatjuk, hogy (3) (a) fennáll. Ehhez először belátjuk, hogy

(5) $$Q_0 \vdash (\forall z)\big(z < k \Longrightarrow \neg\,\varphi(n,z)\big)\,.$$

Nos, 8 . o. (★)–al feltehető, hogy $k > 0$. (Pontosan azt fogjuk csinálni, amit ott csináltunk.)

$i<k=f(n)=\min\{l \in \omega : (n,l) \in R\} \rightsquigarrow (n,i) \notin R$ tehát:

$$(\forall i<k)\ (n,i) \notin R \underset{(1)\,(b)}{\rightsquigarrow} (\forall i<k) Q_0 \vdash \neg\,\varphi(n,i) \underset{\textit{első impl.ax.}}{\rightsquigarrow} (\forall i<k) Q_0 \vdash z=i \Longrightarrow \neg\,\varphi(n,z) \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow\ Q_0 \vdash (z=0 \Rightarrow \neg\,\varphi(n,z))\ \text{és} \ldots \text{és}\ Q_0 \vdash z=k-1 \Rightarrow \neg\,\varphi(n,z))\ \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow\ Q_0 \vdash \big(z=0 \Rightarrow \neg\,\varphi(n,z)\big) \wedge \ldots \wedge \big(z=k-1 \Rightarrow \neg\,\varphi(n,z)\big)\ \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow\ Q_0 \vdash\ z=0 \,\vee\, z=1 \,\vee\, \ldots \,\vee\, z=k-1 \Longrightarrow \neg\,\varphi(n,z)\ \underset{\textit{4. o. Állítás (iv)}:\ m>0}{\underset{\downarrow}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow\ Q_0 \vdash z < k \Longrightarrow \neg\,\varphi(n,z))\ \rightsquigarrow\ Q_0 \vdash (\forall z)(z < k \Longrightarrow \neg\,\varphi(n,z))\,.$$

Tehát (5)–öt bebizonyítottuk. Nomármost (1) (a) és (4) miatt $Q_0 \vdash \varphi(n,k)$, így (5)–el

$$Q_0 \vdash \varphi(n,k) \,\wedge\, (\forall z)\big(z < k \Longrightarrow \neg\,\varphi(n,z)\big)\,,$$

vagyis ψ definíciója alapján $Q_0 \vdash \psi(n,k)$, ami nem más, mint (3) (a).

(B) Most (3) (b)–t bizonyítjuk. Ehhez (2)–vel a $\psi(n,y)$ illetve a $\psi(n,k)$ következményeit vizsgáljuk. A már bizonyított (3) (a)–t is használni fogjuk.

• $\psi(n,y)$**:** $\{\psi(n,y)\} \underset{\psi\ \textit{def.}:z \rightsquigarrow k}{\underset{\downarrow}{\vdash}} k < y \Longrightarrow \neg\,\varphi(n,k)$ • $\psi(n,k)$**:** $Q_0 \underset{(3)(a)\ \textit{és}\ \psi\ \textit{def.}}{\underset{\downarrow}{\vdash}} \varphi(n,k)\,.$

Így $Q_0 \cup \{\psi(n,y)\} \vdash \varphi(n,k) \,\wedge\, \big(k < y \Longrightarrow \neg\,\varphi(n,k)\big) \rightsquigarrow Q_0 \cup \{\psi(n,y)\} \vdash \neg\, k < y\,.$

Másrészt a követekezményekben fordított szereposztással $(k \longleftrightarrow y)$:

• $\psi(n,y)$**:** $\{\psi(n,y)\} \underset{\psi\ \textit{def.}}{\underset{\downarrow}{\vdash}} \varphi(n,y)$ • $\psi(n,k)$**:** $Q_0 \underset{\psi\ \textit{def.},\,(3)(a):z \rightsquigarrow y}{\underset{\downarrow}{\vdash}} y < k \Longrightarrow \neg\,\varphi(n,y)\,.$

Így $Q_0 \cup \{\psi(n,y)\} \vdash \varphi(n,y) \,\wedge\, \big(y < k \Longrightarrow \neg\,\varphi(n,y)\big) \rightsquigarrow Q_0 \cup \{\psi(n,y)\} \vdash \neg\, y < k\,.$

[10] Itt és a továbbiakban is (anélkül, hogy ezt külön megjegyeznénk) feltesszük, hogy a változó, melyre egy formula valamely szabad változóját cseréljük nem fordul elő szabadon a formulában. (Ez a feltevés a kötött változók cseréjének lehetősége miatt mindig jogos). Itt most pl. feltehető, hogy z nem fordul elő φ–ben.

Ezekkel: $Q_0 \cup \{\psi(n,y)\} \vdash \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{4. old Áll.(iii)}}}{y \not< k \wedge k \not< y \;\vdash}\; y = k \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow\; Q_0 \vdash \psi(n,y) \Longrightarrow y{=}k \;\rightsquigarrow\; Q_0 \vdash (\forall y)\big(\psi(n,y) \Longrightarrow y{=}k\big)\,,$$

amit bizonyítani akartunk.

QED

Megjegyzés (FÜGGVÉNY REPREZENTÁLHATÓSÁGÁNAK ÉS FUNKCIONÁLIS REPREZENTÁLHATÓSÁGÁNAK EKVIVALENCIÁJA)

Mivel, nyilván minden $f : \omega^m \longrightarrow \omega$ függvényre fennáll a tétel feltétele és $\mathsf{min}_m f = f$, a tételből az adódik, hogy ha valamely $f : \omega^m \longrightarrow \omega$ függvény reprezentálható valamely φ formulával, akkor f funkcionálisan reprezentálható a $\mathsf{min}_m \varphi$ formulával (speciálisan minden Δ_0–reprezentálható függvény funkcionálisan Δ_0–reprezentálható). Mivel már láttuk, hogy megfordítva, a funkcionális reprezentálhatóságból következik a reprezentálhatóság (11. old.), a függvényekre vonatkozóan az adódik, hogy a reprezentálhatóság és funkcionális reprezentálhatóság ekvivalensek.

1.5 Helyettesítés

Motiváció

(i) Definíció. Adott $f, g : \omega \longrightarrow \omega$, $h : \omega^2 \longrightarrow \omega$ függvények esetén a jól ismert függvény kompozíció (összetett függvény képzés), azaz egy vagy több függvénynek valamely függvénybe való helyettesítése csak speciális esete annak a transzformációnak, melyet szintén hallgatólagosan gyakorta alkalmazunk anélkül, hogy nevet adtunk volna neki. Ez egy vagy több függvénynek valamely relációba való helyettesítése: $(h\circ(f,g))(n) \doteq h(f(n), g(n))$, azaz $(h\circ(f,g))(n) = m$ iff $h(f(n), g(n)) = m$, tehát

$$h\circ(f,g) \doteq \{(n,m) \in \omega^2 : (f(n), g(n), m) \in h\}$$

Itt tehát speciálisan az a reláció, amibe helyettesítünk, függvény. Általánosabb eset ha, például, adott $f, g : \omega \longrightarrow \omega$ függvényekkel azon számokat vizsgáljuk, melyekre fennáll, hogy $f(n) < g(n)$. Ez az új reláció persze nem más, mint az f és g függvényeknek a $L \doteq <$ relációba való helyettesítése vagy az f, g függvényeknek az L relációval való kompozíciója:

$$L\circ(f,g) \doteq (n \in \omega : (f(n), g(n)) \in L\} = \{n \in \omega : f(n) < g(n)\}$$

(ii) Tételek.

Minket momentán az érdekel, hogyan örökli a helyettesítéssel kapott reláció az eredeti reláció ill. a helyettesítendő függvények definiálhatósági ill. reprezentálhatósági tulajdonságait. A definíciót tehát olyan alakra kell hozni, hogy abban explicite az összetevők által definiált relációk szerepeljenek. A példaként felhozott két esetben nyilván:

$$h\circ(f,g) = \{(n,m) \in \omega^2 : \text{ van } k, l \in \omega, \text{ hogy } f(n) = k, g(n) = l \text{ és } h(k,l) = m\}\,.$$
$$L\circ(f,g) = \{n \in \omega : \text{ van } m, k \in \omega, \text{ hogy } f(n) = m,\ g(n) = k \text{ és } (m,k) \in L\}\,.$$

Tehát, ha ha φ, ψ, η rendre definiálja az $f, g, h-$t, akkor

$$\mu_{h\circ(f,g)} = \mu(x,w) \doteq (\exists y)(\exists z)(\varphi(x,y) \wedge \psi(x,z) \wedge \eta(y,z,w))$$

definálja a kompozíciójukat, $h\circ(f,g)-$t és ha φ, ψ, η rendre definiálja az $f, g, L-$et, akkor

$$\mu_{L\circ(f,g)} = \mu(x) \doteq (\exists y)(\exists z)(\varphi(x,y) \wedge \psi(x,z) \wedge \eta(y,z))$$

definálja a kompozíciójukat, $L\circ(f,g)-$t. Következésképp, definiálhatóak kompozíciója definiálható. A definiáló formulákból az is közvetlenül leolvasható, hogy

(1) $\varphi, \psi \in \Delta_2^*$, $\eta \in \Delta_0 \rightsquigarrow \mu_{L\circ(f,g)} \in \Delta_0$

(2) $\varphi, \psi, \eta \in \Sigma \rightsquigarrow \mu_{L\circ(f,g)} \in \Sigma$

A fenti érvelés szintaktikus változata pedig a reprezentálhatóak kompozíciójára ad analóg állítást.

1.5.1 Helyettesítés és definiálhatóság

Definíció

Legyen $k > 0$, $R \subseteq \omega^k$, $f_i : \omega^m \longrightarrow \omega$ minden $i = 1, 2, \ldots, k$–ra és $f \doteq (f_1, f_2, \ldots, f_k)$.

$$R\circ f \doteq \{(n_1, n_2, \ldots, n_m) : (f_1(n_1, n_2, \ldots, n_m), f_2(n_1, n_2, \ldots, n_m), \ldots, f_k(n_1, n_2, \ldots, n_m)) \in R\}$$

az f–nek az R–be való **helyettesítése**.

Tétel (HELYETTESÍTÉSI TÉTEL)

Legyen $k > 0$, $R \subseteq \omega^k$, $f_i : \omega^m \longrightarrow \omega$ minden $i = 1, 2, \ldots, k$–ra és $f \mathrel{\mathring{=}} (f_1, f_2, \ldots, f_k)$.

(i) Ha R Δ_0–definiálható és minden $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén f_i Δ^*_{m+1}–definiálható, akkor $R \circ f$ is Δ_0–definiálható.

(ii) Ha R Σ–definiálható és minden $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén f_i Σ–definiálható, akkor $R \circ f$ is Σ–definiálható.[11]

Megjegyzés

Függvénybe való helyettesítés megőrzi a termkorlátosságot.[12]

1.5.2 Helyettesítés és reprezentálhatóság

Tétel

A reprezentálhatóság invariáns a függvény kompozícóra, azaz reprezentálható függvények reprezentálható függvénybe való helyettesítésével kapott függvény reprezentálható.

Bizonyítás.

A szokásos módon csak egy speciális esetet (két egyváltozós függvény helyettesítésének esetét) vizsgáljuk (az általános eset triviálisan analóg). Legyen tehát $f, g : \omega \longrightarrow \omega$, $F : \omega^2 \longrightarrow \omega$ és tegyük fel, hogy a szereplő függvények reprezentálhatóak, azaz a reprezentálható függvények funkcionális reprezentálhatósága miatt (15. old. Következmény) funkcionálisan reprezentálhatóak a $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ formulákkal. Legyen $h \mathrel{\mathring{=}} F \circ (f, g)$. Ekkor tetszőleges $n \in \omega$ esetén[13]

(1) (a)	$Q_0 \vdash \varphi(n, f(n))$		(a')	$Q_0 \vdash (\forall y)(\varphi(n, y) \Longrightarrow y = f(n))$
(b)	$Q_0 \vdash \psi(n, g(n))$		(b')	$Q_0 \vdash (\forall z)(\psi(n, z) \Longrightarrow z = g(n))$
(c)	$Q_0 \vdash \eta(f(n), g(n), h(n))$		(c')	$Q_0 \vdash (\forall w)(\eta(f(n), g(n), w) \Longrightarrow w = h(n))$

[11]Pl. $f, g : \omega \longrightarrow \omega, R \subseteq \omega^2$, $f(n) = m$ **iff** $\underline{\omega} \models \varphi(n, m)$, $g(n) = m$ **iff** $\underline{\omega} \models \psi(n, m)$, $(n, m) \in R$ **iff** $\underline{\omega} \models \eta(n, m)$, $h \mathrel{\mathring{=}} (f, g)$, $\mu = (\exists y)(\exists z)(\varphi(x, y) \wedge \psi(x, z) \wedge \eta(y, z))$. Ekkor μ definiálja $R \circ h$–t: $m \in R \circ h$ **iff** $m \in \{k \in \omega : (f(k), g(k)) \in R\}$ **iff** $(f(m), g(m)) \in R$ **iff** van $i, j \in \omega$, hogy $f(m) = i$, $g(m) = j$ és $(i, j) \in R$ **iff** van $i, j \in \omega$, hogy $\underline{\omega} \models \varphi(m, i)$, $\underline{\omega} \models \psi(m, j)$ és $\underline{\omega} \models \eta(i, j)$ **iff** van $i, j \in \omega$, hogy $\underline{\omega} \models \varphi(m, i) \wedge \psi(m, j) \wedge \eta(i, j)$ **iff** $\underline{\omega} \models (\exists y)(\exists z)(\varphi(m, y) \wedge \psi(m, z) \wedge \eta(y, z))$ **iff** $\underline{\omega} \models \mu(m)$. Másrészt persze, ahogy már említettük, μ definíciójából közvetlenül leolvasható, hogy $\varphi, \psi \in \Delta^*_2$, $\eta \in \Delta_0 \rightsquigarrow \mu \in \Delta_0$ és $\varphi, \psi, \eta \in \Sigma \rightsquigarrow \mu \in \Sigma$.

[12]A bizonyítás azon alapszik, hogy monoton növőek kompozíciója is ilyen. Egyetlen probléma, hogy a 0 alap esetén a kitevőben a $0 \to n > 0$ átmenet esetén az exp csökken $(0^0 = 1)$. Ezért minden t termben exp–et exp^*–ra cseréljük, ahol $\mathsf{exp}^*(x, y) \mathrel{\mathring{=}} \mathsf{exp}(x + 1, y)$ (tehát az alapot eggyel megnöveljük), mely persze, mint egy termnek egy termbe való helyettesítésének eredménye, szintén term. A kicserélés eredményeképpen létrejövő új t^* termek által definiált függvények mindenütt nagyobb–egyenlőek az eredetiek által definiáltaknál, ezért a t^* termek is termkorlátok és exp^* már mindenütt monoton nő. Ezek után csak két változóra: $s, +, \cdot, \mathsf{exp}^*$ monoton növőek, így minden $t^* = t^*(x, y) \in \mathcal{T}m$ esetén a hozzá tartozó $t^{\underline{\omega}} : \omega^2 \longrightarrow \omega$ függvény mint ezek kompozíciója is minden változójában az, tehát a helyettesítési lemmával

$$\big(h \circ (f, g)\big)(n, m) = h\big(f(n, m), g(n, m)\big) < t_h^{\underline{\omega}}[f(n, m), g(n, m)] \leq t_h^{\underline{\omega}}[t_f^{\underline{\omega}}[n, m], t_g^{\underline{\omega}}[n, m]] = t_h(t_f, t_g)^{\underline{\omega}}[n, m].$$

Tehát ha φ definiálja $h \circ (f, g) \in \Delta_0$–t, akkor a $t \mathrel{\mathring{=}} t_h(t_f, t_g)$–vel $\varphi \wedge z < t$ Δ^*_3–definiálja $h \circ (f, g)$–t.

[13]Itt most persze $f(n)$, $g(n)$ és $h(n)$ a megfelelő függvények n–beli értékeinek megfelelő számtermek. Ami (c) és (c')–t illeti, ott felhasználjuk, hogy $F(f(n), g(n)) = h(n)$.

Legyen
$$\mu = (\exists y)(\exists z)((\varphi(x,y) \wedge \psi(x,z) \wedge \eta(y,z,w))\,.$$

Megmutatjuk, hogy μ funkcionálisan reprezentálja h–t.

- Egyrészt, (1)(a),(b)(c)–ből:

$$Q_0 \vdash \varphi(n,f(n)) \wedge \psi(n,g(n)) \wedge \eta(f(n),g(n),h(n)) \vdash \overbrace{(\exists y)(\exists z)\big(\varphi(n,y) \wedge \psi(n,z) \wedge \eta(y,z,h(n))\big)}^{\mu(n,h(n))}.$$

- Másrészt, (1)(a'),(b')(c')–ből:

$$Q_0 \cup \{\varphi(n,y) \wedge \psi(n,z) \wedge \eta(y,z,w)\} \vdash$$
$$\vdash y = f(n) \wedge z = g(n) \wedge \eta(y,z,w) \vdash \eta(f(n),g(n),w) \vdash w = h(n)$$

amiből elsőrendű logikával (dedukciós tétel, $\vdash \varphi \Rightarrow \psi \rightsquigarrow \vdash (\exists x)\varphi \Rightarrow \psi$ ha $x \notin \mathrm{var}(\psi)$ és generalizáció):
$$Q_0 \vdash (\forall w)\big(\underbrace{(\exists y)(\exists z)(\varphi(n,y) \wedge \psi(n,z) \wedge \eta(y,z,w))}_{\mu(n,w)} \Longrightarrow w = h(n)\big)$$

QED[14]

Definíció

Legyen $k > 0$, $R \subseteq \omega^k$. R **karakterisztikus függvénye** a következő $\chi_R : \omega \longrightarrow 2$ függvény: minden $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \omega$ esetén
$$\chi_R(n_1, n_2, \ldots, n_k) \stackrel{\circ}{=} 1 \quad \text{iff} \quad (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in R$$

Állítás

Legyen $k > 0$, $R \subseteq \omega^k$. R reprezentálható iff χ_R az.

Bizonyítás.

Megintcsak az egyszerűség kedvéért, legyen $k = 2$.

(1) $\Longrightarrow$: Tegyük fel, hogy R reprezentálható $\varphi(x,y)$–vel. Legyen
$$\boldsymbol{\psi(x,y,z) \stackrel{\circ}{=} (\varphi(x,y) \wedge z = 1) \vee (\neg\,\varphi(x,y) \wedge z = 0)}\,.$$

Megmutatjuk, hogy ψ reprezentálja χ_R–t.

- $(n,m,k) \in \chi_R \rightsquigarrow (\chi_R(n,m) = k$ és $k = 1)$ vagy $(\chi_R(n,m) = k$ és $k = 0) \rightsquigarrow$
  - (a) $\chi_R(n,m) = k$ és $k = 1 \rightsquigarrow (n,m) \in R$ és $k = 1 \rightsquigarrow Q_0 \vdash \varphi(n,m) \wedge k = 1 \vdash$
    $\vdash (\varphi(n,m) \wedge k{=}1) \vee (\neg\,\varphi(n,m) \wedge k{=}0) \rightsquigarrow Q_0 \vdash \psi(n,m,k)$
  - (b) $\chi_R(n,m) = k$ és $k = 0 \rightsquigarrow (n,m) \notin R$ és $k = 0 \rightsquigarrow Q_0 \vdash \neg\,\varphi(n,m) \wedge k = 0 \vdash$
    $\vdash (\varphi(n,m) \wedge k{=}1) \vee (\neg\,\varphi(n,m) \wedge k{=}0) \rightsquigarrow Q_0 \vdash \psi(n,m,k)$

[14] A tétel bizonyításában szereplő, a helyettesítés eredményét reprezentáló μ formula alakjából leolvasható, hogy Δ_0–reprezentálható függvények Δ_0–reprezentálható függvénybe való helyettesítésének eredménye Σ–reprezentálható.

$$\bullet\ (n,m,k)\notin\chi_R \underset{\chi_R \text{ globális fv.}}{\rightsquigarrow} (n,m,l)\in\chi_R \text{ és } k\neq l \text{ valamely } l\text{–re} \underset{\text{előző}\ \bullet}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow Q_0\vdash\psi(n,m,l)\wedge k\neq l \rightsquigarrow Q_0\vdash(\varphi(n,m)\wedge l=1\wedge k\neq l)\vee(\neg\varphi(n,m)\wedge l=0\wedge k\neq l)\rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow Q_0\vdash(\varphi(n,m)\wedge k\neq 1)\vee(\neg\varphi(n,m)\wedge k\neq 0) \rightsquigarrow Q_0\vdash\neg\psi(n,m,k)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vdash\neg\psi(n,m,k) \iff (\neg\varphi(n,m)\vee k\neq 1)\wedge(\varphi(n,m)\vee k\neq 0) \underset{\text{disztrib.}}{\iff} \\ \iff (\varphi(n,m)\wedge k\neq 1)\vee(\neg\varphi(n,m)\wedge k\neq 0)\vee(k\neq 1\wedge k\neq 0)\end{array}}$$

(2) $\Longleftarrow$**:** Tegyük fel, hogy χ_R reprezentálható $\psi(x,y,z)$–vel. Legyen

$$\boldsymbol{\varphi(x,y)\mathrel{\mathring{=}}\psi(x,y,1)}\,.$$

Megmutatjuk, hogy φ reprezentálja R–t.

(a) $(n,m)\in R \rightsquigarrow \chi_R(n,m)=1 \rightsquigarrow Q_0\vdash\psi(n,m,1) \rightsquigarrow Q_0\vdash\varphi(n,m)$

(b) $(n,m)\notin R \rightsquigarrow \chi_R(n,m)\neq 1 \rightsquigarrow Q_0\vdash\neg\psi(n,m,1) \rightsquigarrow Q_0\vdash\neg\varphi(n,m)$

QED[15]

Állítás

Legyen $k>0$, $R\subseteq\omega^k$, $f_i:\omega^m\longrightarrow\omega$ minden $i=1,2,\ldots,k$–ra és $f\mathrel{\mathring{=}}(f_1,f_2,\ldots,f_k)$. Ekkor

$$\chi_{R\circ f}=\chi_R\circ f$$

[Csak a speciális $k=2, m=3$–ra. Ekkor

$$R\circ f=\{(n_1,n_2,n_3):(f_1(n_1,n_2,n_3),f_2(n_1,n_2,n_3))\in R\}\,.$$

Tehát

$(\chi_R\circ f)(n_1,n_2,n_3)=1$ IFF $\chi_R\big(f(n_1,n_2,n_3)\big)=1$ IFF $\chi_R\big(f_1(n_1,n_2,n_3),f_2(n_1,n_2,n_3)\big)=1$ IFF $\big(f_1(n_1,n_2,n_3),f_2(n_1,n_2,n_3)\big)\in R$ IFF $(n_1,n_2,n_3)\in R\circ f$ IFF $\chi_{R\circ f}(n_1,n_2,n_3)=1$]

[15] A tétel bizonyításának (1) részében szereplő, az adott reprezentálható R–hez tartozó χ_R–t reprezentáló ψ, ill. a (2) részében szereplő, az adott reprezentálható χ_R–hez tartozó, az R–et reprezentáló φ formula alakjából leolvasható, hogy

(i) Ha az R reláció Δ_0–reprezentálható, akkor a χ_R függvény is Δ_0–reprezentálható.

(ii) (a) Ha a χ_R függvény Δ_0–reprezentálható, akkor az R reláció is Δ_0–reprezentálható

(b) Ha χ_R függvény Σ–reprezentálható, akkor az R reláció is Σ–reprezentálható.

Következmény (REPREZENTÁLHATÓSÁG INVARIÁNS A HELYETTESÍTÉSRE)

A reprezentálhatóság invariáns a függvények relációba való helyettesítésére, azaz reprezentálható függvények reprezentálható relációba való helyettesítésével kapott reláció reprezentálható.

[Legyen $k>0$, $R \subseteq \omega^k$, $f_i : \omega^m \longrightarrow \omega$ minden $i = 1, 2, \ldots, k$–ra és $f \mathrel{\mathring{=}} (f_1, f_2, \ldots, f_k)$. Tegyük fel, hogy R és minden $i = 1, 2, \ldots, k$–ra f_i reprezentálható. Ekkor az előzőekkel, azaz a 17.old. Tétellel és az utana következő két Állítással:

R reprezentálható $\leadsto$ χ_R reprezentálható $\leadsto$ $\chi_R \circ f$ reprezentálható $\leadsto$ $\leadsto$ $\chi_{R \circ f}$ reprezentálható $\leadsto$ $R \circ f$ reprezentálható.] [16]

[16] A 14. és 15. lábjegyzet alapján:

Δ_0 – reprezentálható függvények Δ_0 – reprezentálható relációba való helyettesítésével kapott reláció Σ – reprezentálható.

Valóban, R Δ_0 – reprezentálható $\leadsto$ χ_R Δ_0 – reprezentálható $\leadsto$ $\chi_R \circ f$ Σ – reprezentálható $\leadsto$ $\chi_{R \circ f}$ Σ – reprezentálható $\leadsto$ $R \circ f$ Σ – reprezentálható.

1.6 Rekurzivitás és reprezentálhatóság

Tétel

A rekurzív relációk reprezentálhatósak.

Bizonyítás.

A szokásos módon az egyszerűség és áttekinthetőség kedvéért csak két változóra ($m = 2$) hisz az általános eset nyilván teljesen analóg. Az alkalmazott változók: x, y, z.

Tegyük fel, hogy R is és $\omega^2 \sim R$ is $\Sigma-$definiálható. Mivel a $\Sigma-$definiálható és a Σ_1-definiálható relációk osztálya megegyezik, ez azt jelenti, hogy van $\varphi = \varphi(x, y, z) \in \Delta_0$ és $\psi = \psi(x, y, z) \in \Delta_0$, hogy

$$(*) \qquad \begin{aligned} (n, m) \in R \quad &\text{iff} \quad \underline{\omega} \models (\exists z)\varphi(n, m, z) \\ (n, m) \notin R \quad &\text{iff} \quad \underline{\omega} \models (\exists z)\psi(n, m, z) \end{aligned}$$

Legyen

$$R^+ \mathrel{\mathring{=}} \{(n, m, k) \ : \underline{\omega} \models \varphi(n, m, k)\},$$

$$R^- \mathrel{\mathring{=}} \{(n, m, k) \ : \underline{\omega} \models \psi(n, m, k)\}$$

azaz R^+, R^- a φ és a ψ által definiált relációk, és legyen

$$Q \mathrel{\mathring{=}} R^+ \cup R^- .$$

Nomármost, tetszőleges $(n, m) \in \omega^2$ esetén $(n, m) \in R$ vagy $(n, m) \notin R$, tehát (*) miatt van $k \in \omega$, hogy $(n, m, k) \in Q$. Ezért definiálható a $g : \omega^2 \longrightarrow \omega$ a következőképpen:

$$g \mathrel{\mathring{=}} \min\nolimits_2 Q = \big\{(n, m, k) \in \omega^3 : k = \min\{l \in \omega : (n, m, l) \in Q\}\big\}$$

Nyilván $\eta \mathrel{\mathring{=}} \varphi \vee \psi \in \Delta_0$ definiálja $Q-$t ezért aztán a $\min_2 \eta \in \Delta_0$ definiálja a $g = \min_2 Q-$t. Így, ha f_1 és f_2 a két koordinatafüggvény[17] és $f \mathrel{\mathring{=}} (f_1, f_2, g)$, akkor f minden komponense Δ_0-definiálható és R^+-t a $\varphi \in \Delta_0$ definiálja, tehát a Δ_0-relációk reprezentálhatósága miatt (12.o) f minden komponense és R^+ is reprezentálhatóak. Következésképp a reprezentálhatóságnak a helyettesítésre vonatkozó invarianciája (lásd 20.old.) miatt $R^+ \circ f$ is reprezentálható. Elég tehát belátni, hogy

$$R^+ \circ f = R .$$

Nos, Q és g definíciója alapján, tetszőleges $n, m \in \omega$ esetén

$$(\bullet) \qquad \big(n, m, g(n, m)\big) \in Q = R^+ \cup R^-$$

Ezért

$$\begin{aligned} &(n, m) \in R \rightsquigarrow \text{nem igaz, hogy } (n, m) \notin R \rightsquigarrow \underline{\omega} \not\models (\exists z)\psi(n, m, z) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \text{nincs } k \in \omega \text{, hogy } \underline{\omega} \models \psi(n, m, k) \rightsquigarrow \underline{\omega} \not\models \psi\big(n, m, g(n, m)\big) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \big(n, m, g(n, m)\big) \notin R^- \underset{(\bullet)}{\rightsquigarrow} \big(n, m, g(n, m)\big) \in R^+ \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow (n, m) \in \{(n, m) : \big(n, m, g(n, m)\big) \in R^+\} \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow (n, m) \in \{(n, m) : (f_1(n, m), f_2(n, m), g(n, m)) \in R^+\} = R^+ \circ f . \end{aligned}$$

[17] Általában tetszőleges $m > 0$ és $i = 1, 2, \ldots, m-$re az $i-$edik (m dimenziós) **koordinátafüggvény** az az $f_i : \omega^m \longrightarrow \omega$, melyre tetszőleges $(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \omega^m$ esetén $f_i(n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots, n_m) = n_i$. Ezek nyilván Δ_0-definiálhatóak a $\gamma_i \mathrel{\mathring{=}} (v_{m+1} = v_i) \in \Delta_0-$val.

Másrészt,

$$\begin{aligned}
&(n,m) \in R^+ \circ f = \{(n,m) : (f_1(n,m), f_2(n,m), g(n,m) \in R^+\} \rightsquigarrow \\
&\rightsquigarrow (n,m) \in \{(n,m) : \big(n,m,g(n,m)\big) \in R^+\} \rightsquigarrow \big(n,m,g(n,m)\big) \in R^+ \rightsquigarrow \\
&\rightsquigarrow \underline{\omega} \models \varphi\big(n,m,g(n,m)\big) \rightsquigarrow \text{van } k \in \omega\,, \text{ hogy } \underline{\omega} \models \varphi(n,m,k) \rightsquigarrow \\
&\rightsquigarrow \underline{\omega} \models (\exists z)\varphi(n,m,z) \rightsquigarrow (n,m) \in R\,.
\end{aligned}$$

QED[18]

Megjegyzés

Már láttuk, hogy a rekurzíve felsorolható relációk gyengén reprezentálhatóak (lásd 1.3 utolsó Állítás (i) – et : 12. old.). A Tétel ennek az öszefüggésnek a rekurzivitásra vonatkozó megfelelője. Tehát :

(a) R rekurzíve felsorolható $\rightsquigarrow$ R gyengén reprezentálható

(b) R rekurzív $\rightsquigarrow$ R reprezentálható.

Később látni fogjuk, hogy ezek a következtetések fordított irányban is fennállnak, tehát a gyenge reprezentálhatóság ill. reprezentálhatóság a rekurzíve felsorolhatóság ill. rekurzivitás szemantikus fogalmának szintaktikus megfelelői.

Megjegyzés

Érdemes végül megjegyezni, hogy a reprezentálhatóság definíciójából közvetlenül adódik, hogy ha egy reláció reprezentálható (Σ – reprezentálható), akkor reprezentálható (Σ – reprezentálható) Q_0 bármely kiterjesztésében. Következésképpen a Tételből és a 18. lábjegyzetből :[19]

a rekurzív relációk Σ – reprezentálhatóak Q_0 tetszőleges kiterjesztésében.

[18] A Tétel bizonyításából leolvasható az is, hogy a rekurzív relációk Σ – reprezentálhatóak. Valóban, láttuk, hogy $R = R^+ \circ f$, ahol R is és f komponensei is mind Δ_0 – definiálhatóak, azaz Δ_0 – reprezentálhatóak (lásd 12.o). Következésképpen, a 16. lábjegyzet alapján, az $R = R^+ \circ f$ reláció, mint Δ_0 – reprezentálhatóak helyettesítésének eredménye, Σ – reprezentálható.

[19] Egyébként minden, amit a reprezentálhatóságról elmondtunk, igaz marad Q_0 – reprezentálhatóság helyett Γ – reprezentálhatóságra amennyiben Γ Q_0 tetszőleges kiterjesztése, hiszen ilyen esetben a bizonyítások nyilvánvalóan változatlanul átmennek Q_0 helyett Γ – val.