2. A szintaxis aritmetizálása

2.1 A fundamentális konstruktív relációk

Definíció

(i) Minden $n \in \omega$ esetén
$$p_n \doteq \min\big(\{\, q \in \omega \ : \ q \text{ prím } \} \setminus p^* n\big)$$
az n**–edik prím**.

(ii) Minden $k \in \omega$ esetén $\mathrm{lh}\,(0) \doteq \mathrm{lh}\,(1) \doteq 0$ és
$$\mathrm{lh}(k) \doteq \max\{\, n \in \omega \ : \ p_n | k \,\} \quad \text{ha } k > 1$$
a k–t osztó legnagyobb prím sorszáma, röviden **a** k **hossza**.

(iii) Minden $i \in \omega$ esetén $(0)_i \doteq (1)_i \doteq 0$ és
$$(k)_i \doteq \min\{\, n \in \omega \ : \neg\, p_i^{n+1} | k \,\} \quad \text{ha } k > 1$$
az i–edik prím kitevője k prímfelbontásában, röviden k i**. prímkitevője**.

Megjegyzés

Ezek jogos definíciók. Valóban:

(i) Véges rekurzió elve alapján van egyetlen a jobboldali feltételnek megfelelő függvény, hiszen a prímek száma végtelen, így a tetszőleges p–nél nagyobb prímek halmaza nem üres, és természetes számokból álló nem üres halmaz minimális eleme egyértelmű.

(ii) A prímfelbontás egyértelmű.

(iii) A prímfelbontás egyértelmű, minden természetes szám csak véges sok prímmel osztható és természetes számok véges halmazának van egyértelmű maximális eleme.

Például

(i) $p_0 = 2\,,\ p_1 = 3\,,\ p_2 = 5\,,\ p_3 = 7\,,\ p_4 = 11\,,\ \ldots .$

(ii) $\mathrm{lh}(2^3 \cdot 5^5) = 2\,,\ \mathrm{lh}(3 \cdot 7^2) = 3$

(iii) $(2^3 \cdot 5^5)_0 = 3\,,\ (2^3 \cdot 5^5)_1 = 0\,,\ (2^3 \cdot 5^5)_2 = 5\,,\ (2^3 \cdot 5^5)_3 = 0$

Megjegyzés

Metanyelvi (tehát ZFC nyelvi) formuláinkban a továbbiakban, amíg mást nem mondunk, az i, j, k, l, m, n és indexelt változataik ω elemeit jelentik (pl. $(\forall n)\varphi \doteq (\forall n \in \omega)\varphi$). Az egyszerűség kedvéért sem a definíciókban sem az állításokban nem jelöljük, hogy – természetesen – azok minden, a formulában szereplő szabad változó természetes szám értékére vonatkoznak. (A tárgynyelvben – tehát Q_0 nyelvében, ahogy eddig is – a változók feletti metaváltozók az x, y, z, u, v, w és indexelt változataik.)

Definíció

$m | n \doteq m \neq 0 \wedge (\exists k \leq n)(n = k \cdot m)$ *osztható*

$\mathcal{P}r(n) \doteq n > 1 \wedge (\forall m < n)(m > 1 \Longrightarrow \neg\, m | n)$ *prím*

$m\, \mathcal{P}rm(n) \doteq \mathcal{P}r(m) \wedge (\exists k \leq m^{n^2})\big[\neg\, 2|k \wedge m^n|k \wedge \neg\, m^{n+1}|k \wedge$
$\wedge (\forall i < m)(\forall j \leq m)\big([i < j \wedge \mathcal{P}r(i) \wedge \mathcal{P}r(j) \wedge \neg\,(\exists\, l < m)(\mathcal{P}r(l) \wedge i < l < j)] \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (\forall l \leq n)(i^l | k \iff j^{l+1} | k)\big)\big]$ *(vhanyadik) prím*

$$n\,\mathcal{L}gh(k) \mathrel{\hat{=}} (k=0 \vee k=1) \wedge n=0] \vee (\exists m \le k)[m\,\mathcal{P}rm(n) \wedge m|k \wedge \wedge (\forall i \le k)(\mathcal{P}r(i) \wedge i > m \Longrightarrow \neg\, i|k)]$$ *hossz*

$$n\,\mathcal{E}xp_i(k) \mathrel{\hat{=}} [(k=0 \vee k=1) \wedge n=0] \vee [i > \mathcal{L}gh(k) \wedge n=0] \vee \vee\, [i \le \mathcal{L}gh(k) \wedge (\exists m \le k)(m\,\mathcal{P}rm(i) \wedge m^n|k \wedge \neg\, m^{n+1}|k)]$$ *prímosztó kitevője*

Megjegyzés

A továbbiakban a definiált formulák változók nélküli változatát használjuk az általuk definiált reláció jelölésére. Például: $\mathcal{P}rm \mathrel{\hat{=}} \{(m,n) \in \omega^2 : m\mathcal{P}rm(n)\}$. Ezek szerint $(m,n) \in \mathcal{P}rm$ és $m\mathcal{P}rm(n)$ ugyanazt jelentik.

Állítás

Fenti definícióban szereplő összes reláció, tehát az $|$, $\mathcal{P}r$, $\mathcal{P}rm$, $\mathcal{L}gh$, $\mathcal{E}xp$ relációk mindegyike Δ_0–reláció.

[Nyilván a definiáló ZFC–formulák $\mathcal{L}_A$–kópiái éppen megadják a kívánt Δ_0–formulákat. Például az első kettő esetén (a többi is nyilván pontosan ugyanígy megy, felhasználva a már definiáltakat):

$\varphi = \varphi(x,y) \mathrel{\hat{=}} y \neq 0 \wedge (\exists z < x+1)(x = z \cdot y) \in \Delta_0$,

$\psi = \psi(x) \mathrel{\hat{=}} x > 1 \wedge (\forall y < x)(y > 1 \Longrightarrow \neg\, x|y) \in \Delta_0$

esetén nyilván $n|m$ iff $\underline{\omega} \models \varphi(n,m)$ és $\mathcal{P}rm(n)$ iff $\underline{\omega} \models \psi(n)$]

Megjegyzés

Ha egy reláció valamely $\varphi \in \Delta_0$ formulával definiálható, akkor az a reláció is Δ_0–reláció, melyet a $(\forall x \le t)\,\varphi$ ill. a $(\exists x \le t)\,\varphi$ formula definiál, hiszen $\underline{\omega} \models (\forall x \le t)\varphi$ iff $\underline{\omega} \models (\forall x < t+1)\varphi$ és persze $\varphi \in \Delta_0 \rightsquigarrow (\forall x < t+1)\varphi \in \Delta_0$ (és hasonlóan $\exists$–re).

Állítás

(i) $p_n = m$ iff $m\,\mathcal{P}rm(n)$

(ii) $\mathrm{lh}(k) = n$ iff $n\,\mathcal{L}gh(k)$

(iii) $(k)_i = n$ iff $n\,\mathcal{E}xp_i(k)$

[(i) Nyilván m az n. prím iff van $k = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdots m^n \le (m^n)^n = m^{n^2}$. Ezt a k–t kell leírni: $1 = 2^0$–val osztható, de $2 = 2^1$–el nem, így prímfelbontásában a 3 az első, tehát az 5 a második hatványon szerepel és ezután az n. prímig minden következő prím mindig eggyel nagyobb hatványon szerepel, végül az n. prím pontosan az n. hatványon szerepel. (iii)–hoz: $n\,\mathcal{E}xp_i(k)$ definíciójában a diszjunkció második tagja azért szerepel, hogy a reláció i–ben is globális legyen.]

Állítás

(i) $p_n \le 2^{2^n}$

(ii) $\mathrm{lh}(n) \le n$

(iii) $(n)_i \le n$

[(i) Indukció: (a) $p_0 = 2 \le 2 = 2^{2^0}$

(b) Legyen $n \ge 0$. Euklidésszel és indukciós hipotézissel:

$$p_{n+1} \le 2 \cdot 3 \cdots p_n + 1 \le 2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdots 2^{2^n} + 1 = 2^{\sum_{i=0}^{n} 2^i} + 1 = 2^{\frac{1-2^{n+1}}{1-2}} + 1 =$$
$$= 2^{2^{n+1}-1} + 1 \le 2^{2^{n+1}-1} + 2^{2^{n+1}-1} = 2 \cdot 2^{2^{n+1}-1} = 2^{2^{n+1}-1+1} = 2^{2^{n+1}}$$]

Következmény

p és lh Δ_2^*–függvények, míg ( ) Δ_3^*–függvény, tehát p is lh is és ( ) is term–korlátos függvények.

Megjegyzés

Eddig könnyű dolgunk volt annak megállapításakor, hogy egy–egy reláció konstruktív–e, hiszen minden esetben találtunk olyan, a relációt megadó ZFC–formulát, mely nyilvánvalóan egy $\mathcal{L}_A$ formula ZFC-beli megfelelője volt, így a ZFC–formulából közvetlenül leolvasható volt, hogy a relációt mely $\mathcal{L}_A$–formula definiálja. Ennek oka az volt, hogy minden ilyen, valamely relációt megadó formulában, amennyiben szerepeltek benne az eredeti $\mathcal{L}_A$–ban nem szereplő elemek, azok definiált relációk voltak, melyeket elvben direkt módon, definíciójukat követve ki lehetett küszöbölni a nyelvből, ezáltal közvetlenül ellenőrizhető volt, hogy a formulák, melyben szerepeltek, konstruktív–e. Szükségünk lesz azonban olyan relációkra is, amelyek esetén már nem ez a helyzet, melyekben már nem csak definiált relációk, hanem függvények is felbukkannak. Ezekkel pedig már nem lehet ugyanazt végigcsinálni, mint a relációkkal. A definált relációkkal szemben, melyeknek a régi nyelv formulái felelnek meg (hiszen egyszerűen ezek rövidítései), a definált függvényeknek olyan olyan termek felelnek meg, melyek a régi nyelvnek, az $\mathcal{L}_A$–nak nem termjei, így a ZFC–formula, melyben szerepelnek, nem valamely $\mathcal{L}_A$–formula kópiája.

Példaképpen vizsgájuk meg a faktoriálist, azaz a $\mathcal{F}act \mathrel{\hat{=}} \{(n,m) \in \omega^2 : m = n!\}$ relációt. Nyilván

$$m\,\mathcal{F}act\,n \quad \text{iff} \quad \text{van} \quad k = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^{1\cdot 2} \cdot 7^{(1\cdot 2)\cdot 3} \cdots {p_n}^{1\cdot 2 \cdots n},$$

tehát

$$m\,\mathcal{F}act\,n \mathrel{\hat{=}} (\exists k \le p_n^{m(n+1)})\big((k)_0 = 1 \wedge (k)_n = m \wedge (\forall i < n)[(k)_{i+1} = (k)_i \cdot (i+1)]\big)\,.$$

Nos, erre a relációra és a továbbiakban definiálandókra is fennáll azonban az, hogy az őt megadó ZFC–formulából leolvasható, hogy a reláció milyen módon épül fel egyszerűbb relációkból, azaz ellenőrizhető, hogy konstruktív relációkból a konstruktivitást megőrző operációk segítségével jön–e létre. Ugyanis a függvények olyan helyzetben szerepelnek, mint a termek, nevezetesen relációk argumentumában; ide pedig helyettesítéssel kerülnek. (Informálisan egyébként egy olyan relációt megadó ZFC–formula, mely adott függvényeknek egy relációba való helyettesítésével jött létre, úgy keletkezik, hogy az eredeti relációt megadó ZFC–formulában a változók helyére a megfelelő függvényeket helyettesítjük; illetve fordítva, egy ilyen változó–helyettesítéssel létrejövő formula az adott függvényeknek az eredeti relációba való helyettesítésével létrejövő relációt adja meg. Például, ha

$$R = \{(n,m) : (\exists k > 0)(n + k < m)\} \text{ és } f_1(n,m) = n^2\,,\ f_2(n,m) = n \cdot m\,, f \mathrel{\hat{=}} \langle f_1, f_2\rangle\,,$$

akkor

$$R \circ f = \{(n,m) : (\exists k > 0)(n^2 + k < n \cdot m)\}\,.\ \Big)$$

A konstruktivitásnak a helyettesítésre nézve való invarianciáját leíró állításaink figyelembevételével tehát ha az adott ZFC–formulában olyan részformulák fordulnak elő, melynek – a benne szereplő relációkba való term–korlátos függvényhelyettesítés miatt – nincs közvetlen $\mathcal{L}_A$–beli kópiája, a fenti állítások alapján akkor is kezelhetjük ezeket is valamely a Δ_0–ba eső formulák által definiált relációnak és ezt a tényt felhasználva eldönthetjük, hogy Δ_0–nak a teljes ZFC–formulában szereplő konnektívumokra való zártsága alapján a teljes ZFC – formula által meghatározott relációt továbbra is a megfelelő osztályba eső formula definiálja–e vagy sem.

Mindezeket figyelembe véve, az alábbi informális ökölszabályt fogalmazhatjuk meg, mely természetesen minden konkrét esetben formálisan teljesen korrekt módon ellenőrizhető:

> ha egy ω elemein futó változójú ZFC – formulára fennáll, hogy valamely Δ_0 formula kópiájában szereplő a szabad változóknak term–korlátos függvényekkel (melyek esetleg más term–korlátos függvényekből származtak helyettesítéssel véges sok lépésben) való formális helyettesítésével jön létre akkor az ezáltal a ZFC – formula által megadott reláció konstruktív.

PÉLDÁUL a $\mathcal{F}act$ konstruktív. Valóban

$$m\,\mathcal{F}act\,n = (\exists k \leq p_n^{m(n+1)})\big((k)_0 = 1 \wedge (k)_n = m \wedge (\forall i < n)[(k)_{i+1} = (k)_i \cdot (i+1)]\big)$$

konstruktív, mert a

$$(\exists\, k \leq n_1)\big(n_2 = 1 \wedge n_3 = m \wedge (\forall i < n)[n_4 = n_5 \cdot (i+1)]\big)$$

ZFC – formulából (mely nyilván Δ_0 – kópia, azaz Δ_0 – relációt definiál) jön létre az alábbi (konstruktivitást megőrző) helyettesítésekkel:

$$n_1 \to p_n^{m(n+1)} \quad n_2 \to (k)_0 \quad n_3 \to (k)_n\,, \quad n_4 \to (k)_{i+1} \quad n_5 \to (k)_i$$

ahol persze maga a $p_n^{m(n+1)}$ is az $m(n+1)$ – nek (mely az $n+1$ – nek az $m\,n$ – be való helyettesítésének eredménye) a p_n^m – be való helyettesítésének eredménye, ami maga is a p_n – nek a k^m – be való helyettesítésének eredménye és a $(k)_{i+1}$ az $i+1$ – nek a $(k)_i$ – be való helyettesítésének eredménye.

Természetesen (bár a továbbiakban egyetlen, egy hosszú eljárásban a legutolsó és legfontosabb eset kivételével csak a konstruktivitásra lesz szükségünk) a fenti megfontolások és az eljárás teljesen analóg módon alkalmazhatóak a rekurzíve felsorolhatóságra is (persze a rá vonatkozó invariancia állításokra való hivatkozással). (A fent említett legfontosabb esetben az eljárást éppenséggel a rekurzíve felsorolhatóságra vonatkozóan fogjuk alkalmazni.)

2.2 Gödel–számozás

Definíció

Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges megszámlálható elsőrendű nyelv, azaz valamely $Q, I, J, K \subseteq \omega$ esetén

$$\mathcal{L} \doteq \langle f_i^n \,,\, r_j^n \,,\, c_k \,,\, \rho \rangle_{n\in Q,\, i\in I,\, j\in J,\, k\in K} \,,$$

ahol $\rho(f_i^n) = \rho(r_j^n) = n+1$ minden $n \in Q, i \in I, j \in J$ esetén.

Legyen $Sm_{\mathcal{L}}$ a konstansszimbólumok kivételével az $\mathcal{L}$ összes logikai és nem logikai szimbólumainak halmaza. Legyen $S \doteq Sm_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{T}m_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ és S^* az $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ elemeiből alkotott összes véges sorozatok halmaza. A $g : S \cup S^* \longrightarrow \omega$ függvényt rekurzióval a következőképpen definiáljuk:

(i) $g : Sm_{\mathcal{L}} \longrightarrow \omega$ definíciója:

szimbólum	$=$	$\neg$	$\wedge$	$\forall$	f_i^n	r_j^n
g	3	5	7	9	$11+8(2^n\,3^i)$	$13+8(2^n\,3^j)$

(ii) $g : \mathcal{T}m_{\mathcal{L}} \longrightarrow \omega$ definíciója:

term	v_k	c_k
g	$15+8\,k$	$17+8\,k$

$$g(f_i^n(t_0, t_1, \ldots t_n)) \doteq 2^{g(f_i^n)} \cdot 3^{2^{g(t_0)} \cdot 3^{g(t_1)} \cdots p_n^{g(t_n)}}$$

(iii) $g : \mathcal{F}m_{\mathcal{L}} \longrightarrow \omega$ definíciója:

(a) $g(r_j^n(t_0, t_1, \ldots t_n)) \doteq 2^{g(r_j^n)} \cdot 3^{2^{g(t_0)} \cdot 3^{g(t_1)} \cdots p_n^{g(t_n)}}$

(b) $g(t_0 = t_1) \doteq 2^{g(=)} \cdot 3^{g(t_0)} \cdot 5^{g(t_1)} = 2^3 \cdot 3^{g(t_0)} \cdot 5^{g(t_1)}$

(c) $g(\neg\,\varphi) \doteq 2^{g(\neg)} 3^{g(\varphi)} = 2^5 \cdot 3^{g(\varphi)}$

(d) $g(\varphi \wedge \psi) \doteq 2^{g(\wedge)} \cdot 3^{g(\varphi)} \cdot 5^{g(\psi)} = 2^7 \cdot 3^{g(\varphi)} \cdot 5^{g(\psi)}$

(e) $g((\forall v_k)\varphi) \doteq 2^{g(\forall)} \cdot 3^{g(v_k)} \cdot 5^{g(\varphi)} = 2^9 \cdot 3^{g(v_k)} \cdot 5^{g(\varphi)}$

(iv)

$$g(\langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle) \doteq 2^{g(\varphi_0)} \cdot 3^{g(\varphi_1)} \cdots p_n^{g(\varphi_n)}$$

tetszőleges $s \doteq \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle \in S^*$ esetén.

A g függvényt $\mathcal{L}$ **Gödel–számozás**ának, $g(s)$ értékét pedig s **Gödel–szám**ának hívjuk tetszőleges $s \in S \cup S^*$ esetén.

Állítás

g kölcsönösen egyértelmű.

Megjegyzések

(i) Persze nem minden szám valamely objektum Gödel–száma. Ilyenek például a $2^5 \cdot 3^{2k+1}$ alakú számok, mert a 2 kitevője miatt ezek csak negált formulák Gödel–számai lehetnek, de formulák Gödel–száma páros.

(ii) Nyilván egyértelmű prímfelbontás alapján tetszőleges számról megállapítható, hogy valamely objektum Gödel–száma–e, és ha igen melyiké. Az, hogy milyen tipusú objektumról van szó, az már a prímfelbontás első lépésében eldönthető. Ugyanis csak attól függ, hogy a prímfelbontásban 2 kitevője mekkora.

(iii) g intuitíve (máshogy nem is lehetne) konstruktív és ezen múlik, hogy a vele definiálandó fogalmak megőrzik intuitív konstruktívitásukat.

(iv) Az argumentumszám (ρ) azért eggyel nagyobb az indexénél, hogy egyszerűsítse a jelölést: pl. $f_i^n(t_0, \ldots, t_n)$ – t lehet írni.

(v) A továbbiakban a Gödel – számozás segítségével definiálandó fogalmak természetesen függenek a tekintett $\mathcal{L}$ nyelvtől, de ezt (ugyancsak természetesen) nem fogjuk jelölni, hisz ezt mindig rögzítettnek tekintjük. Egy konkrét nyelv vizsgálata esetén pedig nyilvánvalóan kiderül a kontextusból, hogy melyik ez a nyelv, tehát, hogy az általánosan definiált fogalmak mely nyelvre vonatkoznak.

2.3 A szintaxis konstruktivitása

TERMEK

Definíció

(i) $\mathcal{V}arbl(n) \stackrel{\circ}{=} (\exists k < n)(n = 15 + 8k)$ *változószimbólum*

(ii) $\mathcal{C}onst(n) \stackrel{\circ}{=} (\exists k < n)(n = 17 + 8k)$ *konstansszimbólum*

(iii) $\mathcal{F}nsym_m(n) \stackrel{\circ}{=} (\exists k < n)(n = 11 + 8(2^m\, 3^k))$ *függvényszimbólum*

Állítás

(i) (a) $\mathcal{V}arbl(n)$ iff n egy változószimbólum Gödel–száma
(b) $\mathcal{C}onst(n)$ iff n egy konstansszimbólum Gödel–száma
(c) $\mathcal{F}nsym_n(m)$ iff m egy n argumentumos függvénysszimbólum Gödel–száma

(ii) $\mathcal{V}arbl$, $\mathcal{C}onst$ és $\mathcal{F}nsym$ konstruktív relációk

Definíció

(i) **Termgenerátor sorozatoknak** nevezzük az olyan $\langle n_0\,,\ n_1\,,\ \ldots\,,\ n_m\rangle \in \omega^{m+1}$ számsorozatokat, melyekre fennáll, hogy minden $k \le m$ esetén az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

(a) n_k atomi term (azaz változó vagy konstans szimbólum) Gödel–száma

(b) valamely $i, j \in \omega$ és $k_0\,,\ k_1\,,\ \ldots\,,\ k_j < k$ esetén

$$n_k = 2^{g(f_i^j)} \cdot 3^{2^{n_{k_0}} \cdot 3^{n_{k_1}} \cdots p_j^{n_{k_j}}}$$

(ii) Egy $\langle n_0\,,\ n_1\,,\ \ldots\,,\ n_m\rangle$ számsorozatot **rövidnek** nevezünk ha:

(a) $m < n_m$
(b) $n_i \le n_m$ minden $i \le m$ esetén

(iii) Az $n-$re végződő (rövid) termgenerátor sorozatokat n (**rövid**) **termgenerátor sorozatai**nak nevezzünk.

(iv) Tetszőleges $k \in \omega$ **prímkitevősorozata** az az egyértelmű $\langle n_0\,,\ n_1\,,\ \ldots n_m\rangle \in \omega^{m+1}$ sorozat, melyre

$$k = p_0^{n_0} \cdot p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}\,,$$

ahol p_m a legnagyobb $k-$val osztható prím.

(v) Legyenek $n,\, k \in \omega$ tetszőlegesek. k az n (**kis**) **termgenerátora** ha k prímkitevősorozata n termgenerátor sorozata (és $k < p_n^{n^2}$).

Állítás

Ha k prímkitevősorozatának hossza $< n$ és minden eleme $\le n$, speciálisan ha k prímkitevősorozata rövid és utolsó eleme n, akkor $k < p_n^{n^2}$.

$$\left[\ k = p_0^{n_0} \cdot p_1^{n_1} \cdots p_{m-1}^{n_{m-1}} \cdot p_m^{n_m} \le p_0^{n} \cdot p_1^{n} \cdots p_m^{n} \le p_m^{n} \cdot p_m^{n} \cdots p_m^{n} = (p_m^n)^{m+1} \le (p_m^n)^n = p_m^{n^2} < p_n^{n^2}\ \right]$$

Állítás

(i) Termgenerátor sorozat minden eleme valamely term Gödel–száma.

(ii) Minden t termhez van $g(t)$ – nek rövid termgenerátor sorozata.[1]

Következmény

Tetszőleges $n \in \omega$ akkor és csakis akkor valamely term Gödel–száma, ha van kis termgenerátora.

Definíció

(i) $k\,\mathcal{T}mgen(n) \mathrel{\hat{=}} (k)_{\mathrm{lh}(k)} = n \wedge (\forall i \leq \mathrm{lh}(k))\big(\mathcal{V}arbl((k)_i) \vee \mathcal{C}onst((k)_i) \vee$

$\vee \big[\mathrm{lh}((k)_i) = 1 \wedge$

$\wedge (\exists m \leq k)\big(\mathcal{F}nsym_m(((k)_i)_0) \wedge \mathrm{lh}((k)_i)_1 = m \wedge (\forall l \leq m)(\exists j < i)\big[\big(((k)_i)_1\big)_l = (k)_j\big]\big]\big)$

termgenerátor

(ii) $\mathcal{T}rm(n) \mathrel{\hat{=}} \big(\exists k < (p_n)^{n^2}\big)(k\,\mathcal{T}mgen(n))$ *term*

Állítás

(i) (a) $k\,\mathcal{T}mgen(n)$ iff k az n termgenerátora

(b) $\mathcal{T}mgen$ konstruktív reláció

(ii) (a) $\mathcal{T}rm(n)$ iff n valamely term Gödel–száma

(b) $\mathcal{T}rm$ konstruktív reláció

Állítás

$x \in V$ pontosan akkor változója egy t termnek, ha $g(x)$ előfordul $g(t)$ minden rövid termgenerátor sorozatában.

Definíció

$m\,\mathcal{T}mvar(n) \mathrel{\hat{=}} \mathcal{V}arbl(m) \wedge \mathcal{T}rm(n) \wedge (\forall k < p_n^{n^2})\big(k\mathcal{T}mgen(n) \Rightarrow (\exists i \leq \mathrm{lh}(k))((k)_i = m)\big)$

termváltozó

Következmény

(i) $m\,\mathcal{T}mvar(n)$ iff m az n Gödel–számú term egy változójának Gödel–száma

(ii) $\mathcal{T}mvar$ konstruktív reláció

[1] A rövidséghez: **(a)** Ha egy termgenerátor sorozatot úgy rendezünk át, hogy monoton növő sorozatot kapjunk, akkor **(a1)** szintén termgenerátor sorozatot kapunk, hiszen egy összetett term (melynél lényeges, hogy a benne szereplő termek Gödel–számai elöbb jöjjenek, mint a term Gödel–száma) Gödel–száma biztosan nagyobb, mint a benne szereplő termek Gödel–számai **(a2)** 1–nél nagyobb számról indulunk és minden lépés 1 – nél többet növel **(b)** minden termgenerátor sorozatra igaz, hogy ha nincsenek feleslegesek a sorozatban, akkor minden, a sorozatban felbukkanó Gödel-szám esetén a hozzá tartozó term az utolsó Gödel-számhoz tartozó term résztermje, így Gödel száma kisebb az utolsóénál.

Definíció

Legyen az x változó, a t term és az $s \stackrel{\circ}{=} \langle n_0, n_1, \ldots, n_m \rangle \in \omega^{m+1}$ termgenerátor sorozat tetszőleges. Az $s^* \stackrel{\circ}{=} \langle n_0^*, n_1^*, \ldots, n_m^* \rangle \in \omega^{m+1}$ sorozatot az $s-$**ből** $x-t$ **helyettesítéssel kapott termsorozatnak** nevezzük, ha tetszőleges $i \leq m$ esetén az alábbi feltételek teljesülnek:

(i) Ha n_i atomi term Gödel–száma, akkor

$$n_i \neq g(x) \rightsquigarrow n_i^* = n_i$$

$$n_i = g(x) \rightsquigarrow n_i^* = g(t)$$

(ii) Ha valamely $q, k \in \omega$ és i_0, i_1, …, $i_k < i$ esetén

$$n_i = 2^{g(f_q^k)} \cdot 3^{2^{n_{i_0}} \cdot 3^{n_{i_1}} \cdots p_k^{n_{i_k}}}$$

akkor

$$n_i^* = 2^{g(f_q^k)} \cdot 3^{2^{n_{i_0}^*} \cdot 3^{n_{i_1}^*} \cdots p_k^{n_{i_k}^*}}$$

Állítás

Legyenek $n \in \omega$ és $t, s \in \mathcal{T}m$ tetszőlegesek. $n = g(s_t^x)$ akkor és csak akkor, ha van $g(s)-$nek olyan u rövid termgenerátor sorozata és egy olyan v sorozat, hogy v az $s-$ból $x-t$ helyettesítéssel kapott termsorozat, melynek utolsó eleme n, továbbá az a szám, melynek prímkitevősorozata v, felülről becsülhető $p_k^{k^2}-$el, ahol $k = n + g(s)$.[2]

Definíció

(i) $n\,\mathcal{T}msubseq_{\,l}^{\,m} k \stackrel{\circ}{=} \mathcal{V}arbl(m) \wedge \mathcal{T}rm(l) \wedge \mathrm{lh}(n) = \mathrm{lh}(k) \wedge k\,\mathcal{T}mgen\big((k)_{\mathrm{lh}(k)}\big) \wedge (\forall i \leq \mathrm{lh}(k))$

$\big[(\mathcal{V}arbl((k)_i) \vee \mathcal{C}onst((k)_i) \Longrightarrow ((k)_i \neq m \Rightarrow (n)_i = (k)_i) \wedge ((k)_i = m \Rightarrow (n)_i = l)\big) \wedge$

$\wedge\big(\neg\,\mathcal{V}arbl((k)_i) \wedge \neg\,\mathcal{C}onst((k)_i) \Longrightarrow \mathcal{T}rm((n)_i) \wedge \mathrm{lh}((n)_i) = 1 \wedge ((n)_i)_0 = ((k)_i)_0 \wedge$

$\wedge\, \mathrm{lh}((n)_i)_1 = \mathrm{lh}((k)_i)_1 \wedge (\forall j \leq \mathrm{lh}((k)_i)_1)(\forall j' < i)(((k)_i)_1)_j = (k)_{j'} \Longrightarrow (((n)_i)_1)_j = (n)_{j'}\big)\big]$

helyettesítéssel kapott termsorozat

(ii) $n\,\mathcal{T}msubst_l^m k \stackrel{\circ}{=} (\exists\, i < p_{n+k}^{(n+k)^2})(\exists\, j < p_k^{k^2})\big(\,(i)_{\mathrm{lh}(n)} = n \wedge j\,\mathcal{T}mgen(k) \wedge i\,\mathcal{T}msubseq_{\,l}^{\,m}\, j\,\big)$

termhelyettesítés

Következmény

(i) $n\,\mathcal{T}msubst_l^m k$ iff az n Gödel–számú term a k Gödel–számú termben az m Gödel–számú változónak az l Gödel–számú termmel való helyettesítésének eredménye.

(ii) $\mathcal{T}msubst$ konstruktív reláció.

[2]A helyettesítéssel kapott termsorozat nem okvetlenül tergenerátor sorozata utolsó elemének, hisz abban a helyettesített t nem okvetlenül szerepel. Ami a becslést illeti, ez a 7. old. Állításból következik, hisz u rövid és a két sorozat hossza azonos, így $g(s)$ nagyobb a közös hossznál és persze n nagyobb a v összes többi eleménél, tekintve, hogy azok s_t^x résztermjeinek Gödel−számai.

FORMULÁK

Definíció

(i) $\mathcal{R}elsym_m(n) \doteq (\exists k < n)(n = 13 + 8(2^m 3^k))$ *relációszimbólum*

(ii) (a) $\mathcal{A}trel(n) \doteq \mathrm{lh}(n) = 1 \wedge$
$\wedge (\exists m<n)\big(\mathcal{R}elsym_m((n)_0) \wedge \mathrm{lh}((n)_1)=m \wedge (\forall i\le m)\mathcal{T}rm(((n)_1)_i)\big)$ *atomi reláció*

(b) $\mathcal{A}teq(n) \doteq (\exists\, k_0, k_1<n)(\mathcal{T}rm(k_0) \wedge \mathcal{T}rm(k_1) \wedge n = 2^3 \cdot 3^{k_0} \cdot 5^{k_1})$ *atomi egyenlőség*

(c) $\mathcal{A}tfm(n) \doteq \mathcal{A}trel(n) \vee \mathcal{A}teq(n)$ *atomi formula*

(iii) (a) $k\,\mathcal{F}mgen(n) \doteq (k)_{\mathrm{lh}(k)}=n \wedge (\forall i\le \mathrm{lh}(k))\big(\mathcal{A}tfm((k)_i) \vee$
$\vee (\exists\, j<i)((k)_i = 2^5 \cdot 3^{k_j}) \vee (\exists\, j,m<i)((k)_i = 2^7 \cdot 3^{k_j} \cdot 5^{k_m}) \vee$
$\vee (\exists\, j<i)(\exists\, m<n)(\mathcal{V}arbl(m) \wedge (k)_i = 2^9 \cdot 3^m \cdot 5^{k_j})\big)$ *formulagenerátor*

(b) $\mathcal{F}ml\,(n) \doteq (\exists k<p_n^{n^2})\, k\,\mathcal{F}mgen(n)$ *formula*

(iv) (a) $n\,\mathcal{A}trelsub{}_l^m k \doteq \mathcal{V}arbl(m) \wedge \mathcal{T}rm(l) \wedge \mathcal{A}trel(k) \wedge \mathcal{A}trel(n) \wedge$
$\wedge(\forall j<k)\big(\mathcal{R}elsym_j((k)_0) \Longrightarrow \mathcal{R}elsym_j((n)_0) \wedge (\forall i\le j)((n)_1)_i\mathcal{T}msubst_l^m(((k)_1)_i)\big)$

atomi reláció helyettesítés

(b) $n\,\mathcal{A}teqsub{}_l^m k \doteq \mathcal{V}arbl(m) \wedge \mathcal{T}rm(l) \wedge \mathcal{A}teq(k) \wedge \mathcal{A}teq(n) \wedge$
$\wedge (\forall k_0, k_1<k)(\forall n_0, n_1<n)\big(k = 2^3 \cdot 3^{k_0} \cdot 5^{k_1} \wedge n = 2^3 \cdot 3^{n_0} \cdot 5^{n_1} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow n_0\mathcal{T}msubst_l^m k_0 \wedge n_1\mathcal{T}msubst_l^m k_1\big)$

atomi egyenlőség helyettesítés

(c) $n\,\mathcal{F}msubseq{}_l^m k \doteq$
$\mathcal{V}arbl(m) \wedge \mathcal{T}rm(l) \wedge \mathrm{lh}(n) = \mathrm{lh}(k) \wedge k\,\mathcal{F}mgen\big((k)_{\mathrm{lh}(k)}\big) \wedge (\forall i\le \mathrm{lh}(k))(\forall\, j_0, j_1<i)$
$\big((\mathcal{A}trel((k)_i) \Rightarrow (n)_i Atrelsub{}_l^m (k)_i) \wedge (\mathcal{A}teq((k)_i) \Rightarrow (n)_i Ateqsub{}_l^m k_i) \wedge$
$((k)_i=2^5 \cdot 3^{k_{j_0}} \Rightarrow (n)_i=2^5 \cdot 3^{n_{j_0}}) \wedge ((k)_i=2^7 \cdot 3^{k_{j_0}} \cdot 5^{k_{j_1}} \Rightarrow (n)_i=2^7 \cdot 3^{n_{j_0}} \cdot 5^{n_{j_1}}) \wedge$
$\wedge (\forall l<k)\,[\,\mathcal{V}arbl(l) \wedge (k)_i = 2^9 \cdot 3^l \cdot 5^{k_{j_0}} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (\, l\neq m \Rightarrow (n)_i=2^9 \cdot 3^l \cdot 5^{n_{j_0}}) \wedge (\, l=m \Rightarrow (n)_i=(k)_i\,]\,\big)$

helyettesítéssel kapott formulasorozat

(d) $n\,\mathcal{F}msubst_l^m k \doteq (\exists\, i<p_{n+k}^{(n+k)^2})(\exists\, j < p_k^{k^2})\big(\,(i)_{\mathrm{lh}(n)}=n \wedge j\,\mathcal{F}mgen(k) \wedge i\,\mathcal{F}msubseq{}_l^m\, j\,\big)$

formulahelyettesítés

Következmény

(i) Fenti relációk mindegyike a nevében jelzett relációt definiálja.
(Tehát például

$\mathcal{F}ml(n)$ iff n valamely formula Gödel–száma és

$n\,\mathcal{F}msubst{}_l^m k$ iff $n = g\big(g^{-1}(k)^{g^{-1}(m)}_{g^{-1}(l)}\big)$ és $g^{-1}(k) \in \mathcal{F}ml$, és $g^{-1}(m) \in \mathcal{V}arbl$, és $g^{-1}(l) \in \mathcal{T}m$ iff az n Gödel–számú formula a k Gödel–számú formulában az m Gödel–számú változónak az l Gödel–számú termmel való helyettesítésének eredménye.)

(ii) Fenti relációk mindegyike konstruktív reláció.

[Minden, a termekre definiált fogalom (pl. termgenerátor sorozat, kis termgenerátor stb.) tökéletesen analóg módon definiálható formulákra (pl. formulagenerátorsorozat, kis formulagenerátor stb.) és az ezekre vonatkozó állítások bizonyítása is tökéletesen analóg.]

Definíció

Legyen $n \in \omega$. Azt mondjuk, hogy az $\langle n_0\,,\ n_1\,,\ \ldots\,,\ n_m \rangle \in \omega^{m+1}$ számsorozat **az** n**–et parciálisan generáló formulasorozat** ha

(i) n_0 atomi formula Gödel–száma

(ii) minden $k < m$ esetén az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

(a) $n_{k+1} = 2^5 \cdot 3^{n_k}$

(b1) $n_{k+1} = 2^7 \cdot 3^j \cdot 5^{n_k}$ ahol j valamely formula Gödel–száma

(b2) $n_{k+1} = 2^7 \cdot 3^{n_k} \cdot 5^j$ ahol j valamely formula Gödel–száma

(c) $n_{k+1} = 2^9 \cdot 3^l \cdot 5^{n_k}$ ahol l valamely változó Gödel–száma

(iii) $n_m = n$

Állítás

Minden valamely n számot parciálisan generáló formulasorozat rövid, azaz n–nél kevesebb elemből áll és ezek egyike sem nagyobb n–nél.[3]

Állítás

Legyen az x változó, a t term és a φ formula tetszőleges.

(i) $x \in \mathrm{var}(\varphi)$ iff van olyan, a $g(\varphi)$–t parciálisan generáló $\langle n_0\,,\ n_1\,,\ \ldots\,,\ n_m \rangle$ formulasorozat, hogy

(a) x változója az n_0 Gödel–számú atomi formulának

(b) minden $k \leq m$ esetén, ha n_k egy $(\forall y)\psi$ alakú formula Gödel–száma, akkor $y \neq x$.

(ii) $x \in \mathrm{bnd}_t(\varphi)$ iff van olyan a $g(\varphi)$–t parciálisan generáló $\langle n_0\,,\ n_1\,,\ \ldots\,,\ n_m \rangle$ formulasorozat, hogy

(a) x változója az n_0 Gödel–számú atomi formulának

(b) minden $k \leq m$ esetén, ha n_k egy $(\forall y)\psi$ alakú formula Gödel–száma, akkor $y \neq x$

(c) a t–nek van egy olyan z változója és van egy olyan $k \leq m$, hogy n_k egy $(\forall z)\psi$ alakú formula Gödel–száma.

[3]Parciálisan generáló formulasorozat mindig nő, nincsenek benne felesleges elemek és lásd az 1. lábjegyzetet.

Definíció

(i) (a) $n\,\mathcal{A}tfmtm(m) \stackrel{\circ}{=} \mathcal{T}rm(n) \wedge \big(\,[\mathcal{A}trel(m) \wedge (\exists i \le \mathrm{lh}((m)_1))((m)_1)_i = n] \vee$
$\vee\;\; [\mathcal{A}teq(m) \wedge ((m)_1 = n \vee (m)_2 = n)]\big)\big)$

atomi formulában előforduló term

(b) $n\,\mathcal{A}tfmvar(m) \stackrel{\circ}{=} \mathcal{V}arbl(n) \wedge \mathcal{A}tfm(m) \wedge (\exists k < m)\big(k\,\mathcal{A}tfmtm(m) \wedge n\,\mathcal{T}mvar(k)\big)$

atomi formula változója

(ii) (a) $k\,\mathcal{P}cfmgen(n) \stackrel{\circ}{=} (k)_{\mathrm{lh}(k)} = n \;\wedge\; \mathcal{A}tfm((k)_0) \;\wedge\; (\forall i < \mathrm{lh}(k)\,)$
$\big(((k)_{i+1} = 2^5 \cdot 3^{k_i}) \vee (\exists j < n)(\mathcal{F}ml(j) \wedge [(k)_{i+1} = 2^7 \cdot 3^j \cdot 5^{k_i} \vee (k)_{i+1} = 2^7 \cdot 3^{k_i} \cdot 5^j] \vee$
$\vee (\exists\, m < n)(\mathcal{V}arbl(m) \;\wedge\; (k)_{i+1} = 2^9 \cdot 3^m \cdot 5^{k_i})\big)$

parciálisan generáló formulasorozat

(b) $n\,\mathcal{V}ar(m) \stackrel{\circ}{=} \mathcal{V}arbl(n) \wedge \mathcal{F}ml(m) \wedge (\exists k < p_m^{m^2})\big(k\,\mathcal{P}cfmgen(m) \wedge n\,\mathcal{A}tfmvar((k)_0) \wedge$
$\wedge (\forall i \le \mathrm{lh}(k))(\forall\, j < m)(\forall\, l < m)(\mathcal{V}arbl(l) \;\wedge\; \mathcal{F}ml(j) \;\wedge\; (k)_i = 2^9 \cdot 3^l \cdot 5^j \Longrightarrow l \ne n)\big)$

szabad változó

(c) $n\,\mathcal{B}nd_l(m) \stackrel{\circ}{=} \mathcal{V}arbl(n) \;\wedge\; \mathcal{F}ml(m) \;\wedge\; \mathcal{T}rm(l) \wedge$
$\wedge (\exists k < p_m^{m^2})\big(k\,\mathcal{P}cfmgen(m) \;\wedge\; n\,\mathcal{A}tfmvar((k)_0) \wedge$
$\wedge (\forall i \le \mathrm{lh}(k))(\forall j < m)(\forall i' < m)(\mathcal{V}arbl(j) \wedge \mathcal{F}ml(i') \wedge (k)_i = 2^9 \cdot 3^j \cdot 5^{i'} \Longrightarrow j \ne n) \wedge$
$\wedge (\exists\, i \le \mathrm{lh}(k))(\exists\, j < m)(\exists\, i' < m)(j\mathcal{T}mvar(l) \;\wedge\; \mathcal{F}ml(i') \;\wedge\; (k)_i = 2^9 \cdot 3^j \cdot 5^{i'})\big)$

termre nézve kötött változó

Következmény

(i) Fenti relációk mindegyike a nevében jelzett relációt definiálja.

(Tehát például $n\,\mathcal{V}ar(m)$ iff az n Gödel–számú változó az m Gödel–számú formula szabad változója

és $n\,\mathcal{B}nd_l(m)$ iff az n Gödel–számú változó kötött változója az m Gödel–számú formulának az l Gödel–számú termre nézve.)

(ii) Fenti relációk mindegyike konstruktív reláció.

Definíció

$\mathcal{F}rml_k(n) \stackrel{\circ}{=} \mathcal{F}ml(n) \;\wedge\; (\forall m < n)\big(m\,\mathcal{V}ar(n) \Longrightarrow (\exists\, l \le k)(m = 15 + 8 \cdot l \;\wedge\; l > 0)\big)$

legfeljebb vmennyi változójú formula

$\mathcal{S}nt(n) \stackrel{\circ}{=} \mathcal{F}ml(n) \;\wedge\; (\forall m < n)\,\neg\, m\,\mathcal{V}ar(n)$ *mondat*

Állítás

(i) (a) $\mathcal{F}rml_k(n)$ iff n egy olyan formula Gödel–száma, melynek szabad változói mind a $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ – ban vannak, azaz $n = g(\varphi)$ valamely $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ – ra.

(b) $\mathcal{S}nt(n)$ iff n egy mondat Gödel–száma

(ii) Mind $\mathcal{F}rml$ mind $\mathcal{S}nt$ konstruktív reláció.

BIZONYÍTÁS

Definíció

(i) $n\mathcal{N}eg(m) \doteq \mathcal{F}ml(n) \wedge \mathcal{F}ml(m) \wedge n = 2^5 \cdot 3^m$ *tagadás*

(ii)

(a) $n\mathcal{C}onj(n_1, n_2) \doteq \mathcal{F}ml(n) \wedge \mathcal{F}ml(n_1) \wedge \mathcal{F}ml(n_2) \wedge n = 2^7 \cdot 3^{n_1} \cdot 5^{n_2}$ *konjunkció*

(b) $n\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \doteq \mathcal{F}ml(n) \wedge (\exists m_1, m_2 < n)\big(n\mathcal{N}eg(m_1) \wedge m_1\mathcal{C}onj(n_1, m_2) \wedge m_2\mathcal{N}eg(n_2)\big)$ *implikáció*

(iii) $n\mathcal{U}niv_k(m) \doteq \mathcal{F}ml(n) \wedge \mathcal{F}ml(m) \wedge \mathcal{V}arbl(k) \wedge n = 2^9 \cdot 3^k \cdot 5^m$ *univerzális kvantifikáció*

Állítás

(i) Fenti relációk mindegyike a nevében jelzett relációt definiálja.

(ii) Fenti relációk mindegyike konstruktív reláció.

Definíció (Logikai axiómák)

(i) $\mathcal{A}ximpl_1(n) \doteq (\exists n_1, n_2, m < n)\big(n\mathcal{I}mpl(n_1, m) \wedge m\mathcal{I}mpl(n_2, n_1)\big)$

(ii) $\mathcal{A}ximpl_2(n) \doteq (\exists n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, k, k_1, k_2 < n)\big(n\mathcal{I}mpl(m_1, m_2) \wedge$
$\wedge m_1\mathcal{I}mpl(n_1, k) \wedge k\mathcal{I}mpl(n_2, n_3) \wedge m_2\mathcal{I}mpl(k_1, k_2) \wedge k_1\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \wedge k_2\mathcal{I}mpl(n_1, n_3)\big)$

(iii) $\mathcal{A}ximpl_3(n) \doteq \big(\exists n_1, n_2, m_1, m_2, k_1, k_2 < n)(n\mathcal{I}mpl(m_1, m_2) \wedge$
$\wedge m_1\mathcal{I}mpl(k_1, k_2) \wedge k_1\mathcal{N}eg(n_1) \wedge k_2\mathcal{N}eg(n_2) \wedge m_2\mathcal{I}mpl(n_2, n_1)\big)$

(iv) $\mathcal{A}xconj_1(n) \doteq \big(\exists n_1, n_2, m < n)(n\mathcal{I}mpl(m, n_1) \wedge m\mathcal{C}onj(n_1, n_2)\big)$

(v) $\mathcal{A}xconj_2(n) \doteq (\exists n_1, n_2, m < n)\big(n\mathcal{I}mpl(m, n_2) \wedge m\mathcal{C}onj(n_1, n_2)\big)$

(vi) $\mathcal{A}xconj_3(n) \doteq (\exists n_1, n_2, m < n)\big(n\mathcal{I}mpl(n_1, m) \wedge m\mathcal{I}mpl(n_2, k) \wedge k\mathcal{C}onj(n_1, n_2)\big)$

(vii) $\mathcal{A}xquan_1(n) \doteq (\exists n_1, n_2, m_1, m_2, k_1, k_2, i < n)\big(\neg\, i\mathcal{V}ar(n_1) \wedge n\mathcal{I}mpl(m_1, m_2) \wedge$
$\wedge m_1\mathcal{U}niv_i(k_1) \wedge k_1\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \wedge m_2\mathcal{I}mpl(n_1, k_2) \wedge k_2\mathcal{U}niv_i(n_2)\big)$

(viii) $\mathcal{A}xquan_2(n) \doteq (\exists n_1, n_2, i, j, k < n)\big(\neg\, i\mathcal{B}nd_j(k) \wedge n\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \wedge$
$\wedge n_1\mathcal{U}niv_i(k) \wedge n_2\mathcal{F}msubst^i_j k\big)$

(ix) $\mathcal{A}xid_1(n) \doteq (\exists m < n)\big(\mathcal{V}arbl(m) \wedge n = 2^3 \cdot 3^m \cdot 5^m\big)$

(x) $\mathcal{A}xid_2(n) \doteq (\exists n_1, n_2, m_1, m_2 < n)\big(n\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \wedge \mathcal{V}arbl(m_1) \wedge \mathcal{V}arbl(m_2) \wedge$
$\wedge n_1 = 2^3 \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2} \wedge (\exists k, k' < n_2)\big(n_2 = 2^3 \cdot 3^k \cdot 5^{k'} \wedge \mathrm{lh}(k) = 1 \wedge \mathrm{lh}(k') = 1 \wedge$
$\wedge (\exists i \le k)\big[\mathcal{F}nsym_i((k)_0) \wedge \mathcal{F}nsym_i((k')_0) \wedge (k)_0 = (k')_0 \wedge$
$\wedge \mathrm{lh}((k)_1) = i \wedge \mathrm{lh}((k')_1) = i \wedge (\forall l \le i)(\mathcal{V}arbl(((k)_1)_l) \wedge \mathcal{V}arbl(((k')_1)_l) \wedge$
$\wedge (\exists j \le i)[((k)_1)_j = m_1 \wedge ((k')_1)_j = m_2 \wedge (\forall l \le i)(l \ne j \Rightarrow ((k)_1)_l = ((k')_1)_l)\,]\,)\big]\big)$

(xi) $\mathcal{A}xid_3(n) \doteq (\exists n_1, n_2, m_1, m_2 < n)\big(n\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \wedge \mathcal{V}arbl(m_1) \wedge \mathcal{V}arbl(m_2) \wedge$
$\wedge n_1 = 2^3 \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2} \wedge (\exists k, k' < n_2)\big(n_2\mathcal{I}mpl(k, k') \wedge \mathrm{lh}(k) = 1 \wedge \mathrm{lh}(k') = 1 \wedge$
$\wedge (\exists i \le k)\big[\mathcal{R}elsym_i((k)_0) \wedge \mathcal{R}elsym_i((k')_0) \wedge (k)_0 = (k')_0 \wedge$
$\wedge \mathrm{lh}((k)_1) = i \wedge \mathrm{lh}((k')_1) = i \wedge (\forall l \le i)(\mathcal{V}arbl(((k)_1)_l) \wedge \mathcal{V}arbl(((k')_1)_l) \wedge$

$$\wedge (\exists j \leq i)[((k)_1)_j = m_1 \,\wedge\, ((k')_1)_j = m_2 \,\wedge\, (\forall l \leq i)(l \neq j \Rightarrow ((k)_1)_l = ((k')_1)_l)\,])\big]\big) \vee$$
$$\vee (\exists n_1, n_2, m_1, m_2, m_3 < n)\big(n\,\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \,\wedge\, \mathcal{V}arbl(m_1) \,\wedge\, \mathcal{V}arbl(m_2) \wedge$$
$$\wedge\, n_1 = 2^3 \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2} \wedge (\exists k, k' < n_2)\big[n_2\,\mathcal{I}mpl(k, k') \wedge$$
$$\wedge\,[(k = 2^3 \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_3} \,\wedge\, k' = 2^3 \cdot 3^{m_2} \cdot 5^{m_3}) \,\vee\, (k = 2^3 \cdot 3^{m_3} \cdot 5^{m_1} \,\wedge\, k' = 2^3 \cdot 3^{m_3} \cdot 5^{m_2})\,]\,\big]\big)$$

(xii) $\mathcal{A}xlog(n) \stackrel{\circ}{=} \mathcal{A}ximpl_1(n) \vee \mathcal{A}ximpl_2(n) \vee \mathcal{A}ximpl_3(n) \vee \mathcal{A}xconj_1(n) \vee \mathcal{A}xconj_2(n) \vee$
$\vee\, \mathcal{A}xconj_3(n) \,\vee\, \mathcal{A}xquan_1(n) \,\vee\, \mathcal{A}xquan_2(n) \,\vee\, \mathcal{A}xid_1(n) \,\vee\, \mathcal{A}xid_2(n) \,\vee\, \mathcal{A}xid_3(n)$

Állítás

(i) Fenti relációk mindegyike a nevében jelzett relációt definiálja.

(ii) Fenti relációk mindegyike konstruktív reláció.

Definíció

Legyen $\Gamma \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$ tetszőleges és $\mathcal{A}x_\Gamma \stackrel{\circ}{=} g^*\Gamma$.

(a) $k\,\mathcal{P}rf_\Gamma(n) \stackrel{\circ}{=} (k)_{\mathrm{lh}(k)} = n \,\wedge\, (\forall i \leq \mathrm{lh}(k))\big(\mathcal{F}ml((k)_i) \wedge$
$$\wedge\,\big[\,\mathcal{A}xlog((k)_i) \,\vee\, \mathcal{A}x_\Gamma((k)_i) \vee\, (\exists\, j, m < i)[(k)_j\,\mathcal{I}mpl((k)_m, (k)_i)] \vee$$
$$\vee\, (\exists\, j < i)(\exists\, l < n)[\mathcal{V}arbl(l) \,\wedge\, (k)_i\,\mathcal{U}niv_l((k)_j)]\,\big]\big)$$

bizonyítás

(b) $\mathcal{P}r_\Gamma(n) \stackrel{\circ}{=} \mathcal{S}nt(n) \,\wedge\, (\exists k)\, k\,\mathcal{P}rf_\Gamma(n)$ *bizonyíthatóság*

Tétel

(i)(a) $k\,\mathcal{P}rf_\Gamma(n)$ iff k az n Gödel–számú formulának az $\mathcal{A}x_\Gamma$ – ba eső Gödel–számú mondatok halmazából (azaz Γ – ból) való bizonyításának Gödel–száma

(b) $\mathcal{P}r_\Gamma(n)$ iff az n Gödel–számú mondat bizonyítható az $\mathcal{A}x_\Gamma$ – ba eső Gödel–számú mondatok halmazából (azaz Γ – ból), tehát
$$\mathcal{P}r_\Gamma = g^*\mathrm{Ded}\,\Gamma\,.$$

(ii) (a) Ha $\mathcal{A}x_\Gamma$ konstruktív reláció, akkor
$$\mathcal{P}rf_\Gamma \quad \text{konstruktív reláció}$$

(b) Ha $\mathcal{A}x_\Gamma$ rekurzíve felsorolható reláció, akkor
$$\mathcal{P}r_\Gamma \quad \text{rekurzíve felsorolható reláció.}$$

2.4 Az aritmetika önreferencialitása

Definíció

Az aritmetika nyelve: $\mathcal{L} \stackrel{\circ}{=} \mathcal{L}_A = \langle\, 0,\, s,\, +,\, \cdot\,,\, \mathsf{exp},\, <\rangle$. Ha g az $\mathcal{L}$ Gödel–számozása, akkor:

$$
\begin{aligned}
&g(0) = 17\,,\ g(s) = 11 + 8(2^1\,3^0) = 27\,,\ g(+) = 11 + 8(2^2\,3^0) = 43\,,\\
&g(\cdot) = 11 + 8(2^2\,3^1) = 107\,,\ g(\mathsf{exp}) = 11 + 8(2^2\,3^2) = 299\,,\\
&g(<) = 13 + 8(2^2\,3^0) = 45\,,\ g(v_1) = 13 + 8\cdot 1 = 23\,,
\end{aligned}
$$

azaz $\mathcal{L}$ alapszimbólumainak Gödel–számai:

szimbólum	$=$	$\neg$	$\wedge$	$\forall$	0	s	$+$	$\cdot$	exp	$<$	v_1
g	3	5	7	9	17	27	43	107	299	45	23

Definíció

$$
\begin{aligned}
n\,\mathcal{N}um(m) \stackrel{\circ}{=} (\exists k < p_n^{n^2})(\mathrm{lh}(k) = m\ \wedge\ (k)_0 = 17\ \wedge\ (k)_m = n\ \wedge\\
\wedge\,(\forall i < m\,)((k)_{i+1} = 2^{27}\cdot 3^{2^{(k)_i}})
\end{aligned}
\qquad \textit{számterm}
$$

Állítás

(i) $n\,\mathcal{N}um(m)$ iff $g(m) = n$, azaz n az m számterm Gödel–száma.

(ii) $\mathcal{N}um$ konstruktív reláció.

Példák[4]

(i) $\mathcal{A}x_{Q_0}$ konstruktív reláció.

(ii) $\mathcal{A}x_{PA}$ konstruktív reláció. (PA a Peano – axiómák, azaz a **Peano – aritmetika**)

Jelölés

A továbbiakban minden eddig definiált reláció esetén rögzítünk egy tetszőleges, a relációt definiáló formulát, mely konstruktív reláció esetén egy Δ_0 – és rekurzíve felsorolható reláció esetén egy Σ_1 – formula. Ez (a bizonyíthatóságra vonatkozó két reláció, a $\mathcal{P}rf_\Gamma$ és a $\mathcal{P}r_\Gamma$ relációk kivételével, ha a bennük szereplő Γ – tól függő, tehát “változó” reláció, az $\mathcal{A}x_\Gamma$ nem Δ_0) éppen lehet a relációt definiáló ZFC – formula egyértelmű $\mathcal{L}_A$ – kópiája.[5] Nos, ezt a minden relációhoz egyértelműen hozzárendelt, a relációt definiáló formulát a reláció nevének sans serif változatával jelöljük, pl.

$$v_1\mathsf{Fmsubst}\,{}^{v_2}_{v_3}v_4 \stackrel{\circ}{=} \mathsf{Fmsubst}\,(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}_A}$$

az a formula, mely definiálja a formulahelyettesítés relációt, azaz

$$
\begin{aligned}
(n, m, l, k) \in \mathcal{F}msubst \quad \text{IFF} \quad n\ \mathcal{F}msubst\,{}^m_l k \quad \text{IFF}\\
\text{IFF} \quad \underline{\omega} \models \mathsf{Fmsubst}\,(n, m, k, l) \quad \text{IFF} \quad \underline{\omega} \models n\ \mathsf{Fmsubst}\,{}^m_l k\,.
\end{aligned}
$$

[4] A bizonyításokhoz lásd a Függeléket a fejezet végén (20. old.)

[5] Ahol persze a relációban szereplő függvényeket az őket definiáló $\mathcal{P}rm$, $\mathcal{L}gh$, $\mathcal{E}xp$ relációk és a függvényekhez tartozó termkorlátok (lásd 2.old.) segítségével kiküszöböljük, pl. a $\big(\forall n < (\mathrm{lh}(k))^2\big)\varphi(n,k)$ reláció $\mathcal{L}_A$ – kópiáját úgy kapjuk, hogy a $(\exists m \le k)(\forall n < m^2)(m\mathcal{L}gh(k) \wedge \varphi(n,k))$ reláció $\mathcal{L}_A$ – kópiáját képezzük. Mśrészt persze $\mathcal{P}r_\Gamma$ esetén (ha $\mathcal{A}x_\Gamma$ Δ_0), akkor $\mathsf{Pr}_\Gamma(v_1) \stackrel{\circ}{=} (\exists v_2)(\mathsf{Snt}(v_1) \wedge v_2\,\mathsf{Prf}_\Gamma\,v_1)$.

Definíció

(i) Legyen tetszőleges $n \in \omega$ esetén $\mathcal{F}m^n_{\mathcal{L}} \triangleq \{\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}} : \mathrm{var}(\varphi) \subseteq \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\}$, azaz azon φ formulák halmaza, melyekre $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ (vagyis melyek szabad változói mind az első n darab között vannak).

(ii) $N \triangleq g^* \mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}}$ a legfeljebb v_1 szabad változójú formulák Gödel–számainak halmaza.

(iii) $\mathcal{F}rml_1(n) \triangleq \mathcal{F}ml(n) \wedge (\forall m < n)\big(m\, \mathcal{V}ar(n) \Longrightarrow m = 23\,)\big)$

Állítás

(i) $\mathcal{F}rml_1$ konstruktív

(ii) $\mathcal{F}rml_1 = g^* \mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}} = N$

Definíció

Tetszőleges $\varphi \in \mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}}$ és $n \in N$ esetén

$$\varphi[\![n]\!] \triangleq (\exists v_1)(\, v_1 = n \wedge \varphi\,)$$

Megjegyzés

Tudjuk, hogy tetszőleges φ, x, t esetén

$$\vdash \varphi^x_t \iff (\exists x)(\, x = t \wedge \varphi\,) \qquad \text{ha} \quad x \notin \mathrm{var}\,(t) \cup \mathrm{bnd}_{\,t}(\varphi)$$

így tetszőleges $\varphi = \varphi(v_1) \in \mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}}$ és $n \in \omega$ esetén

$$\vdash \varphi(n) \iff (\exists v_1)(\, v_1 = n \wedge \varphi(v_1)\,)$$

azaz

$$\vdash \varphi[\![n]\!] \iff \varphi(n)$$

Tétel

Legyen $\mathcal{L} \triangleq \mathcal{L}_A$. Tetszőleges $\varphi \in \mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}}$ esetén van olyan $\psi \in \mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}}$, hogy tetszőleges $n \in N$ esetén

$$Q_0 \vdash \psi(n) \Longleftrightarrow \varphi\big(g\,(\,g^{-1}(n)(n)\,)\big)$$

Bizonyítás.

A bizonyítás két nyilvánvaló lépésből áll. Először definiáljuk a $\mathcal{S}elf$ függvényt a következőképpen: minden $n \in \omega$ esetén

$$\mathcal{S}elf(n) \triangleq g\,\big(\,g^{-1}(n)(n)\big) \quad \text{ha} \;\; n \in N \;\; \text{és} \;\; \mathcal{S}elf(n) = 0 \;\; \text{egyébként.}$$

Mivel a formulába való helyettesítés és a számtermnek lenni reprezentálható, a definíciót lemásoló formula segítségével megmutatjuk, hogy $\mathcal{S}elf$ triviálisan (funkcionálisan) reprezentálható. Ezután a reprezentáló Self formula segítségével megadhatjuk a $\mathcal{S}elf$ –nek a φ által reprezentált relációba való helyettesítését reprezentáló formulát (lásd 1.5):

$$\psi = \psi(x) \triangleq (\exists y)(\mathsf{Self}(x, y) \wedge \varphi(y))\,,$$

ami persze pont a kívánt formula; ezt mutatjuk meg a második lépésben.

- **Első lépés**

Megmutatjuk, hogy a

$$\eta \mathrel{\hat=} \eta(v_1,v_2) = \mathsf{Frml}_1(v_1) \wedge (\exists v_3 < v_2)\big(v_2 \,\mathsf{Fmsubst}\,{}^{23}_{v_3} v_1 \wedge v_3 \,\mathsf{Num}(v_1)\big) \vee \neg\, \mathsf{Frml}_1(v_1) \wedge v_2 = 0$$

formula definiálja a $\mathcal{S}elf$ $-$t. Valóban, nyilván elég az $n \in N$ esetet vizsgálni. Legyen tehát $n \in N$, $k \in \omega$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\omega \models \eta(n,k) \\
&\quad \text{iff} \quad \omega \models (\exists v_3 < k)\big(k \,\mathsf{Fmsubst}\,{}^{23}_{v_3} n \wedge v_3 \,\mathsf{Num}(n)\big) \\
&\quad \text{iff} \quad \omega \models k \,\mathsf{Fmsubst}\,{}^{23}_{m} n \wedge m \,\mathsf{Num}(n) && \text{vmely } m < k\text{–ra} \\
&\quad \text{iff} \quad k \,\mathcal{F}msubst\,{}^{23}_{m} n \quad \text{ÉS} \quad m \,\mathcal{N}um(n) && \text{vmely } m < k\text{–ra} \\
&\quad \text{iff} \quad m = g(n)\,,\ k = g\left(g^{-1}(n)^{g^{-1}(23)}_{g^{-1}(m)}\right) && \text{vmely } m < k\text{–ra} \\
&\quad \text{iff} \quad g(n) < k,\ k = g\big(g^{-1}(n)^{v_1}_{n}\big) \\
&\quad \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{Nyilván: } g(t) < g(\varphi(t))}}{\text{iff}} \quad k = g\big(g^{-1}(n)(n)\big) \\
&\quad \text{iff} \quad (n,k) \in \mathcal{S}elf \quad \text{iff} \\
&\mathcal{S}elf(n) = k\,.
\end{aligned}$$

Nomármost, $\mathsf{Frml}_1, \mathsf{Fmsubst}, \mathsf{Num} \in \Delta_0, \ \rightsquigarrow\ \eta \in \Delta_0 \ \rightsquigarrow\ \mathcal{S}elf$ Δ_0–definiálható

függvény $\underset{\substack{\downarrow \\ \Delta_0\textit{-def.-hatóság és repr.-hatóság ekv.}(1.3)}}{\rightsquigarrow}$ $\mathcal{S}elf$ reprezentálható függvény $\underset{\substack{\downarrow \\ \textit{Fv. repr.-hatóság és funkc. repr.-hatóság ekv.}(1.4)}}{\rightsquigarrow}$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{S}elf$ funkcionálisan reprezentálható.

- **Második lépés**

Jelöljük a a változókat (ilyen sorrendben) x, y –al. $\mathcal{S}elf$ funkcionálisan reprezentálható, tehát van olyan $\mathsf{Self} = \mathsf{Self}(x,y)$ formula, hogy tetszőleges $n, m \in \omega$ esetén

$$(*) \qquad \mathcal{S}elf(n) = m \ \rightsquigarrow$$

$$\text{(a)} \qquad Q_0 \vdash \mathsf{Self}(n,m)$$

$$\text{(b)} \qquad Q_0 \vdash (\forall y)\big(\mathsf{Self}(n,y) \Longrightarrow y = m\big)$$

Legyen most $\varphi = \varphi(x)$ és $n \in N$ tetszőleges, $m \mathrel{\hat=} \mathcal{S}elf(n)$ és (ahogy a bevezető megjegyzésekben már jeleztük)

$$\psi = \psi(x) \mathrel{\hat=} (\exists y)(\mathsf{Self}(x,y) \wedge \varphi(y))\,.$$

Ekkor

$$Q_0 \cup \{y = m\} \underset{(*)(a)}{\vdash} \mathsf{Self}(n,m) \wedge y = m \vdash \mathsf{Self}(n,y)\,,$$

és fordítva:

$$Q_0 \cup \{\mathsf{Self}(n, y)\} \underset{(*)(b)}{\vdash} y = m\,.$$

Ezekből

$$\begin{aligned}
& Q_0 \vdash y = m \,\wedge\, \varphi(y) \Longrightarrow \mathsf{Self}(n, y) \,\wedge\, \varphi(y) && \rightsquigarrow \\
\rightsquigarrow\ & Q_0 \vdash (\exists y)(y = m \,\wedge\, \varphi(y)) \Longrightarrow (\exists y)(\mathsf{Self}(n, y) \,\wedge\, \varphi(y)) && \rightsquigarrow \\
\rightsquigarrow\ & Q_0 \vdash \varphi[\![m]\!] \Longrightarrow \psi(n)
\end{aligned}$$

és persze ugyanígy

$$\begin{aligned}
& Q_0 \vdash \mathsf{Self}(n, y) \,\wedge\, \varphi(y) \Longrightarrow y = m \,\wedge\, \varphi(y) && \rightsquigarrow \\
\rightsquigarrow\ & Q_0 \vdash (\exists y)(\mathsf{Self}(n, y) \,\wedge\, \varphi(y)) \Longrightarrow (\exists y)(y = m \,\wedge\, \varphi(y)) && \rightsquigarrow \\
\rightsquigarrow\ & Q_0 \vdash \psi(n) \Longrightarrow \varphi[\![m]\!]
\end{aligned}$$

Vagyis

$$Q_0 \vdash \psi(n) \iff \varphi[\![m]\!]\,,$$

amiből $\mathcal{S}elf$ definíciójával és felhasználva, hogy $m = \mathcal{S}elf(n)$, tetszőleges $n \in N$ −re:

$$Q_0 \vdash \psi(n) \iff \varphi[\![g\big(g^{-1}(n)(n)\big)]\!]\,.$$

Így 16 . oldal első Megjegyzése alapján:

QED

2.5 Eldönthetőség

Definíció

Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges megszámlálható elsőrendű nyelv, g ennek Gödel számozása és $\Gamma \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$ tetszőleges elmélet.

(i) Γ **rekurzív** ha $g^*\Gamma$ rekurzív

(ii) Γ **eldönthető** ha $\mathcal{P}r_\Gamma$ rekurzív

(iii) Γ **rekurzíve axiomatizálható** ha van $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, hogy

(a) $\Gamma = \operatorname{Ded}\Gamma_0$

(b) Γ_0 rekurzív

Megjegyzés

Ha Γ rekurzíve axiomatizálható, akkor $\operatorname{Ded}\Gamma = \operatorname{Ded}\operatorname{Ded}\Gamma_0 = \operatorname{Ded}\Gamma_0 = \Gamma$.

Tétel

Teljes konzisztens rekurzív elmélet eldönthető.

Bizonyítás.

Legyen Γ rekurzív. Azt kell megmutatnunk, hogy $\mathcal{P}r_\Gamma$ rekurzív, azaz azt, hogy mind $\mathcal{P}r_\Gamma$, mind pedig komplementere, a $\mathcal{P}rn_\Gamma \doteq \omega \sim \mathcal{P}r_\Gamma$ reláció $\Sigma-$definiálható. Mivel Γ rekurzív, így $\mathcal{P}r_\Gamma$ rekurzíve felsorolható,[6] tehát a $\mathcal{P}r_\Gamma-$t definándó $\mathsf{Pr}_\Gamma = \mathsf{Pr}_\Gamma(v_1)$ formulára $\mathsf{Pr}_\Gamma \in \Sigma$. Legyen

$$\mathsf{Prn}_\Gamma(v_1) \doteq \neg\,\mathsf{Snt}(v_1) \vee \big(\mathsf{Snt}(v_1) \wedge (\exists v_2)\big(\mathsf{Pr}_\Gamma(v_2) \wedge v_2\,\mathsf{Neg}(v_1)\big)\big).$$

Mivel $\mathsf{Snt}, \mathsf{Neg} \in \Delta_0 \subseteq \Sigma$, $\mathsf{Pr}_\Gamma \in \Sigma \rightsquigarrow \mathsf{Prn}_\Gamma \in \Sigma$, elég annyit megmutatni, hogy Prn_Γ definiálja $\mathcal{P}rn_\Gamma-$t. Legyen $n \in \omega$ tetszőleges.

$n \in \mathcal{P}rn_\Gamma = \omega \sim \mathcal{P}r_\Gamma$ iff
iff n nem mondat Gödel–száma vagy vmely $\sigma \in \mathcal{S}n-$re $g(\sigma) = n$ és $\Gamma \nvdash \sigma$ iff
iff n nem mondat Gödel–száma vagy vmely $\sigma \in \mathcal{S}n-$re $g(\sigma) = n$ és $\Gamma \vdash \neg\,\sigma$ iff
iff n nem mondat Gödel–száma vagy vmely $\sigma, \tau \in \mathcal{S}n-$re $g(\sigma) = n$, $\Gamma \vdash \tau$, $\tau = \neg\,\sigma$ iff
iff $\neg\,\mathcal{S}nt(n)$ vagy $\big(\mathcal{S}nt(n)$ és $\mathcal{P}r_\Gamma(k) \wedge k\,\mathcal{N}eg(n)$ valamely $k-$ra$\big)$ iff
iff $\neg\,\mathcal{S}nt(n) \vee \big(\mathcal{S}nt(n) \wedge (\exists k)(\mathcal{P}r_\Gamma(k) \wedge k\,\mathcal{N}eg(n))\big)$ iff
iff $\underline{\omega} \models \neg\,\mathsf{Snt}(n) \vee \big(\mathsf{Snt}(n) \wedge (\exists v_2)(\mathsf{Pr}_\Gamma(v_2) \wedge k\,\mathsf{Neg}(n))\big)$ iff
iff $\underline{\omega} \models \mathsf{Prn}_\Gamma(n)$

QED

Következmény

Teljes konzisztens rekurzíve axiomatizálható elmélet eldönthető.[7]

[6] Lásd az erre vonatkozó Tételt a 14. oldalon

[7] $\Gamma = \operatorname{Ded}\Gamma_0$, Γ teljes, konzisztens, Γ_0 rekurzív $\underset{\operatorname{Ded}\Gamma=\operatorname{Ded}\Gamma_0}{\rightsquigarrow}$ Γ_0 teljes, konzisztens $\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ ha Γ_0 rekurzív akkor tétellel $\operatorname{Ded}\Gamma = \operatorname{Ded}\Gamma_0$ rekurzív.

Függelék: Az aritmetikai axiomák konstruktivitása

- $\mathcal{A}x_{Q_0}$

[Az α_6 kivételével triviális (legfeljebb az az újdonság az előzőekhez képest az, hogy az axiómákban számtermek is szerepelnek) és egymással analóg. Így az α_6 kivételével csak egyről, az α_1 – ről mutatjuk meg, hogy Δ_0 – definiálható.

(a) $\mathcal{A}x_{\alpha_1}(n) \stackrel{\circ}{=} (\exists i, j, k, n_1, n_2 < n)$

$$\big(i\,\mathcal{N}um(n_1) \wedge j\,\mathcal{N}um(n_2) \wedge k\,\mathcal{N}um(n_1+n_2) \wedge n = 2^3 \cdot 3^k \cdot 5^{2^{43}} \cdot 3^{2^i \cdot 3^j}\big)$$

(b) $\mathcal{A}x_{\alpha_6}$ egy kicsit problematikusabb, mert rekurzíve definiált diszjunkció szerepel benne. Ehhez definiálnunk kell a diszjunkciót és segítségével a szokásos (sorozatos) módon az axiómában szereplő $m+1$ elemű diszjunkciót.

(1) $n\,\mathcal{D}is(m,k) \stackrel{\circ}{=} (\exists i < n)(n\mathcal{I}mpl(i,k) \wedge i\,\mathcal{N}eg(m))$

(2) $n\,\mathcal{D}s(m) \stackrel{\circ}{=} (\exists k < p_n^{n^2})\big(\mathrm{lh}(k) = m \wedge (k)_0 = 2^3 \cdot 3^{23} \cdot 5^{17} \wedge (k)_m = n \wedge$

$$\wedge (\forall i < m)(\exists\, l < n)\big(l\,\mathcal{N}um(i+1) \wedge (k)_{i+1}\,\mathcal{D}is((k)_i, 2^3 \cdot 3^{23} \cdot 5^l)\big)\big)$$

Nyilván $n\mathcal{D}is(m,k)$ iff n az m és k Gödel számú formulák diszjunkciójának Gödel–száma és $n\,\mathcal{D}s(m)$ iff $n = g(\bigvee_{i=0}^m v_1 = i)$. Ezzel aztán az $\mathcal{A}x_{\alpha_6}$:

$\mathcal{A}x_{\alpha_6}(n) \stackrel{\circ}{=} (\exists m, k, k_1, k_2, n_1, n_2, n_3, m_1, m_2 < n)$

$$\big(n\,\mathcal{U}niv_{23} n_3 \wedge n_3 \mathcal{C}onj(k_1,k_2) \wedge k_1 \mathcal{I}mpl(n_1,n_2) \wedge k_2 \mathcal{I}mpl(n_2,n_1) \wedge$$

$$\wedge n_1\,\mathcal{D}is(m_1,m_2) \wedge k\,\mathcal{N}um(m) \wedge m_1 = 2^3 \cdot 3^{23} \cdot 5^k \wedge m_2 = 2^{45} \cdot 3^{23} \cdot 5^k \wedge n_2\,\mathcal{D}s(m)\big)$$]

- $\mathcal{A}x_{PA}$ konstruktív reláció.

[Az egyetlen konstruktivitás szempontjából nemtriviális azióma nyilván az indukció séma, úgyhogy csak erről mutatjuk meg, hogy Δ_0 – definiálható. (A többiek egyes formulák, pl. $(\forall v_1)(v_1 + 0 = v_1)$, tehát ilyen alakúak: $\mathcal{A}x_i(n) \stackrel{\circ}{=} (n = k_i)$ valamely fix k_i számtermekre, tehát a $v_1 = k_i$ $(k_i = 1, 2, \ldots)$ atomi formulával definiáltak.)

Maga az indukcó séma a következő: $\varphi_0^{v_1} \wedge (\forall v_1)(\varphi \Rightarrow \varphi_{sv_1}^{v_1}) \Longrightarrow (\forall v_1)\varphi$. Így

$\mathcal{A}x_{ind}(n) \stackrel{\circ}{=} (\exists i, m, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 < n)$

$$\big(\mathcal{F}ml(m) \wedge n\,\mathcal{I}mpl(n_1,n_2) \wedge n_2\,\mathcal{U}niv_{23} m \wedge n_1 \mathcal{C}onj(n_3,n_4) \wedge$$

$$\wedge n_3\,\mathcal{F}msubst_{17}^{23}\, m \wedge n_4\,\mathcal{U}niv_{23} n_5 \wedge n_5 \mathcal{I}mpl(m,n_6) \wedge n_6\,\mathcal{F}msubst_i^{23}\, m \wedge i = 2^{27} \cdot 3^{2^{23}}\big)$$]