3. A limitációs tételek

3.1 A diagonális lemma

J. N. Findlay adta meg a Hazug paradoxon egy olyan természetes nyelvi megfogalmazását, melyben nincs ún. indexikális:

> Az új mondat, amelyet úgy kapunk, hogy az "Az új mondat, amelyet úgy kapunk, hogy az x mondat nevét a benne szereplő változó helyére írjuk, hamis" mondat nevét a benne szereplő változó helyére írjuk, hamis.[1]

Ez mind szintaktikusan mind szemantikusan tökéletes mondat és éppen azt fejezi ki, amit a Hazug, hiszen ha végrehajtjuk a benne leírt transzformációt, éppen magát a mondatot kapjuk. Továbbá, éppen mert teljesen kifogástalan, a benne szereplő minden informális fogalomnak (név, helyettesítés stb.) megvan a formális aritmetikai megfelelője, tehát az egész mondat elvben formalizálható az aritmetikában. Ezt fogjuk tenni. Formális nyelvünk $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A$, az aritmetika nyelve lesz. Legyen $p = p(\mu)$:[2]

> Az új mondat, amelyet úgy kapunk, hogy a μ formula nevét a benne szereplő (egyetlen) változó helyére írjuk, rendelkezik a Φ tulajdonsággal.

Ekkor a magáról $\Phi-$t állító mondat természetesen: $p(\text{“}p(\mu)\text{”})$. Így, ha megtaláljuk $p(\mu)$ formális megfelelőjét, $\psi(v_1)-$et, akkor a a magáról $\Phi-$t állító mondat formális megfelelője nyilván a $\psi(g(\psi))$ lesz.[3]

Legyen tehát $\varphi \in \mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}}$ tetszőleges. Ekkor nyilván a p formális megfelelője a következő kifejezés:[4] $\varphi\big(g(\mu(g(\mu)))\big)$, vagy a $g(\mu) = n \in N \doteq g^*\mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}}$ jelöléssel: $\varphi\big(g(g^{-1}(n)(n))\big)$. Ez azonban még metanyelvi kifejezés, hisz szerepel benne a g metanyelvi függvény. Amire szükségünk van az egy tárgyelvi formula, ami pontosan azt fejezi ki, amit ez a metanyelvi kifejezés. Tehát amit keresünk az egy olyan $\psi = \psi(v_1) \in \mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}}$ formula, mely a Q_0-beli bizonyíthatóság értelmében ekvivalens[5] ezzel a kifejezéssel, azaz minden $n \in N$ esetén $\psi(n)$ és a tekintett kifejezés Q_0-ban egyszerre bizonyíthatóak. Az kell tehát, hogy létezzen egy olyan $\psi = \psi(v_1) \in \mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}}$, hogy minden $n \in N$ esetén

$$(*) \qquad Q_0 \vdash \psi(n) \Longleftrightarrow \varphi\big(g(g^{-1}(n)(n))\big)\,.$$

Ha van egy ilyen formula, akkor az lesz $p(\mu)$ formális megfelelője. Ez a tény volt tehát az, amiért az aritmetika önreferencialitására szükségünk volt, hisz a rá vonatkozó tétel pontosan azt mondja ki, hogy az aritmetika rendelkezik a kívánt tulajdonsággal (lásd 2.4).

[1] Azt az általánosan elterjedt konvenciót alkalmaztuk, hogy egy nyelvi kifejezés (pl. egy mondat) neve az maga a kifejezés idézőjelek között, hiszen az nyilvánvaló, hogy ha valamiről vagy valakiről állítunk valamit, akkor erre az illető (dolog) nevét kell használnunk: PÉTER OKOS. Nem Pétert magát, csak a nevét helyettesítjük. Így természetesen a A HÓ FEKETE NÉGY SZÓBÓL ÁLL kifejezés értelmetlen, az értelmes (és hamis) mondat így szól: "A HÓ FEKETE" NÉGY SZÓBÓL ÁLL.

[2] A formalizálás áttekinthetősége kedvéért most már az egy szabad változós kifejezést mondat helyett formulának nevezzük és a szabad változót a formulákra fenntartott betük egyikével jelöljük.

[3] Hisz a köznyelvi névadásnak megfelelő formális hozzárendelés nyilván a Gödel−számozás.

[4] φ a Φ formális megfelelője és $\mu = \mu(v_1) \in \mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}}$.

[5] A "pontosan azt fejezi ki" nyilván valamelyik ekvivalenciát jelenti, mi a legerősebbet választjuk, azt amiből az összes többi ekvivalencia (vagyis az $\underline{\omega}-$n való igazság értelmében ill. a Q_0 bármely kiterjesztésében való bizonyíthatóság értelmében vett ekvivalencia) következik.

Tétel (DIAGONÁLIS LEMMA)

Minden $\varphi = \varphi(v_1) \in \mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}}$, esetén van $\lambda \in \mathcal{S}n^1_{\mathcal{L}}$, hogy

$$Q_0 \vdash \lambda \Longleftrightarrow \varphi(g(\lambda))\,.$$

Bizonyítás.

Az aritmetika önreferencialitásának (2.4) értelmében van $\psi = \psi(v_1) \in \mathcal{F}m^1_{\mathcal{L}}$, hogy minden $n \in N$ esetén

(*) $$Q_0 \vdash \psi(n) \Longleftrightarrow \varphi\big(g(g^{-1}(n)(n))\big)\,.$$

Alkalmazzuk ezt *magára* ψ-re, azaz, legyen $n \circeq g(\psi)$. Ekkor

$$\varphi\big(g(g^{-1}(n)(n))\big) = \varphi\big(g(\psi(g(\psi)))\big) \ \text{ és } \ \psi(n) = \psi(g(\psi)).$$

Legyen ez utóbbi mondat λ, azaz $\lambda \circeq \psi(g(\psi))$. Ekkor (*) a kívánt alakot ölti:

$$Q_0 \vdash \lambda \Longleftrightarrow \varphi(g(\lambda))\,,$$

QED

Megjegyzés

A Diagonális lemma mutatja, hogy valóban sikerült formalizálnunk az önmagáról $\Phi-$t állító mondatot, hisz a lemma szerint (a Q_0-ban való bizonyíthatóság és így mind az $\underline{\omega}-$n való igazság értelmében mind a Q_0 bármely kiterjesztésében való bizonyíthatóság értelmében) λ iff λ a φ által kifejezett tulajdonságú.

3.2 A limitációs tételek

Definíció

$\Gamma \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$ $\quad \mathbf{\Sigma_1}$**–helyes** ha $\Sigma_1 \cap \mathrm{Ded}\,\Gamma \subseteq \mathrm{Th}\,\underline{\omega}$ $\quad (\Gamma \vdash \sigma \rightsquigarrow \underline{\omega} \models \sigma\,,\ \sigma \in \Sigma_1 \cap \mathcal{S}n_{\mathcal{L}})$.

Állítás

Σ_1–helyes elmélet konzisztens.[6]

Tétel (Gödel (első) nemteljességi tétele, 1931)

Legyen Γ Q_0 rekurzív kiterjesztése. Ekkor van $\lambda \in \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$ olyan, hogy

(i) Ha Γ konzisztens, akkor $\Gamma \nvdash \lambda$

(ii) Ha Γ Σ_1–helyes, akkor $\Gamma \nvdash \neg\lambda$

Bizonyítás

Először is, Γ rekurzivitása miatt $\mathsf{Pr}_\Gamma \in \Sigma_1$. Diagonális lemmával $\neg\,\mathsf{Pr}_\Gamma(v_1)$–hez van olyan $\lambda \in \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$, hogy

$$Q_0 \vdash \lambda \Longleftrightarrow \neg\,\mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda))\,,$$

amiből $\mathrm{Ded}\,\Gamma \supseteq Q_0$–el,

(*) $$\Gamma \vdash \lambda \Longleftrightarrow \neg\,\mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda))\,.$$

(i) $\Gamma \vdash \lambda \underset{(*)}{\rightsquigarrow} \Gamma \vdash \neg\,\mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda))$ és $\Gamma \vdash \lambda \underset{\mathsf{Pr}_\Gamma\ \mathit{def.}}{\rightsquigarrow} \underline{\omega} \models \mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda)) \underset{\mathsf{Pr}_\Gamma \in \Sigma}{\rightsquigarrow} \Gamma \vdash \mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda))$

Ezek együttesen ellenmondanak Γ konzisztenciájának.

(ii) $\Gamma \vdash \neg\lambda \underset{(*)}{\rightsquigarrow} \Gamma \vdash \mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda)) \underset{\Gamma\ \Sigma_1\text{-}\mathit{helyes}}{\rightsquigarrow} \underline{\omega} \models \mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda)) \underset{\mathsf{Pr}_\Gamma\ \mathit{def.}}{\rightsquigarrow} \Gamma \vdash \lambda$

ellentondva Γ konzisztenciájának, ami triviálisan következik Γ Σ_1–helyességéből (lásd előző Áll.)

QED

Következmények

(i) PA és Q [7] egyetlen Σ_1–helyes (spec. helyes) rekurzív kiterjesztése sem teljes.[8]

(ii) Az aritmetika helyes rekurzív elméletei nem teljesek:[9] minden olyan rekurzív elmélet esetén, melynek $\underline{\omega}$ modellje, van $\underline{\omega}$–n igaz, de az elméletből nem bizonyítható mondat. Ez a híres Gödel–mondat: $\lambda \approx$ 'Én nem vagyok bizonyítható.', hisz $\lambda \cong \neg\,\mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda))$ és a tétellel $\Gamma \nvdash \lambda$, tehát Pr_Γ definíciójával $\underline{\omega} \models \neg\,\mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda)) \rightsquigarrow \underline{\omega} \models \lambda$.

(iii) Az aritmetikának nincs rekurzív axiomatizálása (azaz, nincs olyan rekurzív $\Gamma \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}_A}$ elmélet, hogy $\mathrm{Ded}\,\Gamma = \mathrm{Th}\,\underline{\omega}$ legyen)[10], spec. maga az aritmetika elmélete sem rekurzív.

(iv) Történeti tény, hogy Gödel a tételét nem elsőrendű aritmetikára, hanem a Principia Mathematica-ban szereplő magasabbrendű nyelvre és egy a Σ_1-helyességnél erősebb feltételre az ún. ω-konzisztenciára bizonyította.

---

[6] $\sigma \doteq (\exists x)(x \neq x) \in \Sigma_1\,,\ \Gamma \vdash \sigma \rightsquigarrow \underline{\omega} \models \sigma$, ami abszurdum.

[7] Emlékzetetőül: Q a **Robinson–aritmetika**, mely véges kiterjesztése Q_0–nak.

[8] $Q_0 \subseteq \mathrm{Ded}\,PA$

[9] Nyilván $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}\,\underline{\omega} \rightsquigarrow Q_0 \cup \Gamma$ Σ_1–helyes (és így konzisztens) rekurzív kiterjesztése Q_0–nak.

[10] $Q_0 \subseteq \mathrm{Th}\,\underline{\omega} = \mathrm{Ded}\,\Gamma \rightsquigarrow \Gamma$ Q_0 helyes kiterjesztése és Γ teljes (hisz $\varphi \notin \mathrm{Th}\,\underline{\omega} \rightsquigarrow \neg\varphi \in \mathrm{Th}\,\underline{\omega}$).

Tétel (TARSKI TÉTELE AZ ARITMETIKAI IGAZSÁG DEFINIÁLHATATLANSÁGÁRÓL, 1936)

Az igaz mondatok Gödel számainak halmaza nem definiálható $\underline{\omega}$ – n.

Bizonyítás.

Indirekte, tegyük fel, hogy van ún. **igazság prédikátum**, azaz olyan $\mathsf{Tr} = \mathsf{Tr}(v_1)$, hogy minden $\sigma \in \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$ esetén

(*) $$\underline{\omega} \models \mathsf{Tr}(g(\sigma)) \quad \text{iff} \quad \underline{\omega} \models \sigma\,.$$

Diagonális lemmával, $\neg\,\mathsf{Tr}(v_1)$ – hez van $\lambda \in \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$, hogy:

$$Q_0 \vdash \lambda \Longleftrightarrow \neg\,\mathsf{Tr}(g(\lambda))\,.$$

Mivel $\underline{\omega} \models Q_0$, ebből $$\underline{\omega} \models \lambda \Longleftrightarrow \neg\,\mathsf{Tr}(g(\lambda))$$

azaz $$\underline{\omega} \models \lambda \quad \text{iff} \quad \underline{\omega} \models \neg\,\mathsf{Tr}(g(\lambda))\,,$$

($\lambda = \sigma$ –ra) ellentmondva (*) – nak.

QED

Megjegyzés

A tétel azt mondja ki, hogy az aritmetika elmélete nemcsak, hogy nem rekurzív, nemcsak, hogy nem rekurzíve felsorolható, nemcsakhogy a komplementere nem rekurzíve felsorolható, stb., hanem egyáltalában nincs olyan aritmetikai formula, amellyel le lehetne írni.

Tétel (CHURCH TÉTELE AZ ARITMETIKA ELDÖNTHETETLENSÉGÉRŐL, 1936)

Q_0 minden konzisztens kirejesztése eldönthetetlen.

Bizonyítás.

Indirekte, tegyük fel, hogy Γ konzisztens, eldönthető és $\mathrm{Ded}\,\Gamma \supseteq Q_0$. Ekkor, a $\overline{\Gamma} \doteq \mathrm{Ded}\,\Gamma$ jelölést használva, $\mathcal{P}r_\Gamma = g^*\overline{\Gamma}$ rekurzív, tehát valamely $\varphi = \varphi(v_0)$ formulával reprezentálható is Q_0 – ban (lásd 1.6), azaz tetszőleges $n \in \omega$ – ra

(1) (a) $\quad n \in g^*\overline{\Gamma} \quad \rightsquigarrow \quad Q_0 \vdash \varphi(n)$

(b) $\quad n \notin g^*\overline{\Gamma} \quad \rightsquigarrow \quad Q_0 \vdash \neg\,\varphi(n)$

Diagonális lemma alapján $\neg\,\varphi$ – hez van $\lambda \in \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$, hogy:

(2) $$Q_0 \vdash \lambda \Longleftrightarrow \neg\,\varphi(g(\lambda))\,.$$

Ekkor

$$\lambda \notin \overline{\Gamma} \rightsquigarrow g(\lambda) \notin g^*\overline{\Gamma} \underset{(1)(b)}{\rightsquigarrow} Q_0 \vdash \neg\,\varphi(g(\lambda)) \underset{(2)}{\rightsquigarrow} Q_0 \vdash \lambda \rightsquigarrow \lambda \in \mathrm{Ded}\,Q_0 \subseteq \mathrm{Ded}\,\Gamma = \overline{\Gamma},$$

ami abszurdum. De

$$\lambda \in \overline{\Gamma} \rightsquigarrow g(\lambda) \in g^*\overline{\Gamma} \underset{(1)(a)}{\rightsquigarrow} Q_0 \vdash \varphi(g(\lambda)) \underset{(2)}{\rightsquigarrow} Q_0 \vdash \neg\,\lambda \rightsquigarrow \neg\,\lambda \in \mathrm{Ded}\,Q_0 \subseteq \mathrm{Ded}\,\Gamma = \overline{\Gamma},$$

ellentmond Γ konzisztenciájának. Vagyis sem $\lambda \notin \overline{\Gamma}$ sem $\lambda \in \overline{\Gamma}$ nem állhat fenn.

QED

Tétel (Gödel – Rosser nemteljességi tétel, 1936)

Q_0 egyetlen rekurzív konzisztens kiterjesztése sem teljes.

Bizonyítás.

2.5 alapján minden teljes konzisztens elmélet eldönthető. Church tételével azonban Q_0 minden rekurzív konzisztens kiterjesztése eldönthetetlen.

QED

Kérdés

A Gödel tétel Q_0 kiterjesztéseire vonatkozik. De nyilván, egy nem teljes elméletnél szűkebb elmélet sem teljes. Mi tehát a Q_0 szerepe?

> [Az a szerepe, hogy a vizsgált elmélet valóban aritmetikai legyen, azaz csak aritmetikai összefüggéseket formalizáljon. Valóban, van rekurzív és konzisztens nyilvánvalóan nem aritmetikai teljes elmélet az aritmetika nyelvében, azaz van $\Sigma \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}_\mathcal{A}}$ rekurzív és konzisztens teljes elmélet, mely persze nem kiterjesztése Q_0 –nak. Például a $\Sigma \triangleq \{(\forall x)(x = 0)\}$, hisz ennek nyilván izomorfizmus erejéig egyetlen modellje van, azaz minden modellje elemien ekvivalens.[11]]

[11] Vannak nemtriviális ilyen elméletek is, pl. bármely n – re az n elemű maradékosztály elmélete.

3.3 Két következmény

Tétel (A HALMAZELMÉLET ELDÖNTHETETLENSÉGE ÉS NEMTELJESSÉGE)

ZF minden konzisztens kiterjesztése eldönthetelen.

Bizonyítás.

Legyen $\mathcal{L}_A$ az aritmetika, $\mathcal{L}_S$ a halmazelmélet nyelve és legyen ω a $\mathcal{L}_S$ – ben definiált legkisebb végtelen rendszám.

definíció

Tetszőleges $t \in \mathcal{T}m_{\mathcal{L}_A}$ és $\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}_A}$ esetén $t_S \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}_S}$ ill. $\varphi_S \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}_S}$ a t ill. φ ω – **ra való relativizáltja** a következő:

(i)

(a) $0_S \stackrel{\circ}{=} 0$, $\qquad v_{kS} \stackrel{\circ}{=} v_k$

(b) $(st)_S \stackrel{\circ}{=} s(t_S)$, $(t_1+t_2)_S \stackrel{\circ}{=} t_{1S}+t_{2S}$, $(t_1 \cdot t_2)_S \stackrel{\circ}{=} t_{1S} \cdot t_{2S}$, $(\mathsf{exp}(t_1,t_2))_S \stackrel{\circ}{=} \mathsf{exp}(t_{1S},t_{2S})$

ahol persze a jobboldalon a $\mathcal{L}_A$ függvényszimbólumainak $(s, +, \cdot, \mathsf{exp})$ megfelelő ω – án értelmezett függvények állnak (pl. (b) első összefüggése így írható: $(st)_S \stackrel{\circ}{=} t_S \cup \{t_S\}$) , tehát pl. $\underline{2}_S = (ss\,0)_S = \{0, \{0\}\}$.

(ii)

(a) $(t_1 = t_2)_S \stackrel{\circ}{=} t_{1S} = t_{2S}$, $(t_1 < t_2)_S \stackrel{\circ}{=} t_{1S} < t_{2S}$,

(b) $(\neg\,\varphi)_S \stackrel{\circ}{=} \neg\,\varphi_S$, $(\varphi \wedge \psi)_S \stackrel{\circ}{=} \varphi_S \wedge \psi_S$, $((\forall v_k)\varphi)_S \stackrel{\circ}{=} (\forall v_k \in \omega)\varphi_S$.[12]

Legyen most Γ a ZF egy konzisztens kiterjesztése és indirekte tegyük fel, hogy Γ eldönthető. Legyen (lásd az ábrát a bizonyítás végén)

(1a) $$\Omega \stackrel{\circ}{=} \mathcal{S}n_{\mathcal{L}_A}$$

(1b) $$\Delta_S \stackrel{\circ}{=} \{\sigma_S \in \mathcal{S}n_{\mathcal{L}_S} : \sigma \in \Delta\} \text{ tetszőleges } \Delta \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}_A} \text{ esetén,}$$

(1c) $$\Gamma_{\Omega_S} \stackrel{\circ}{=} \Omega_S \cap \mathrm{Ded}\,\Gamma\,, \qquad \Gamma_A \stackrel{\circ}{=} \{\sigma \in \mathcal{S}n_{\mathcal{L}_A} : \sigma_S \in \Gamma_{\Omega_S}\}\,.$$

Nos, mivel $\mathrm{Ded}\,\Gamma$ rekurzív és két rekurzív halmaz metszete is az (Σ zárt az $\wedge$ – re), gyenge Church – tézissel[13]

(2) $$\Gamma_A \text{ rekurzív.}$$ [14]

Másrészt, legyen $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}_S}$ minden $\mathfrak{S}$ modellje esetén $\omega_{\mathfrak{S}}$ a $\mathfrak{S}$ – beli legkisebb végtelen rendszám és $\underline{\omega}_{\mathfrak{S}} = \langle \omega_{\mathfrak{S}}, 0, s, +, \cdot, \mathsf{exp}, < \rangle$ az a modellja $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}_A}$ – nak ahol a $0, s, +, \cdot$, $\mathsf{exp}, <$ az $\omega_{\mathfrak{S}}$ elemein a szokásosak: a 0 rendszám és a szokásos rendszám műveletek és rendezés.[15]

[12]Például, ha $\sigma = (\forall v_1)(v_1 + s\,0 = v_1 + 1) \in \mathcal{S}n_{\mathcal{L}_A}$, akkor $\sigma_S = (\forall v_1 \in \omega)(v_1 + s\,0 = v_1 + 1) \in \mathcal{S}n_{\mathcal{L}_S}$, ahol $0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}$, $s = \{(v_1, v_2) : v_1 \in \omega \wedge v_2 = v_1 \cup \{v_1\}\}$.

[13]Azoknak az általunk vizsgált konkrét relációknak melyek informális érveléssel rekurzívaknak mutatkoznak, formálisan bizonyíthatóan is rekurzívaknak kell lenniük (Monk).

[14]Kicsit részletesebben, nyilván Ω_S rekurzív, hiszen magáról $\mathcal{S}n_{\mathcal{L}_A}$ – ról már láttuk, hogy Δ_0 és a relativizálás (ha a Gödel számok közötti viszonyra vonatkozik) nyilvánvalóan rekurzív függvény (hiszen éppen a termeken és formulákon való rekurzióval definiáltuk). Továbbá Γ_{Ω_S} szintén az (Δ^w – formulák zártak a konjunkcióra, tehát két Δ^w – reláció metszete is Δ^w) és vele nyilván Γ_A is.

[15]Nyilván $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}_S}$ minden $\mathfrak{S}$ modellje esetén van ilyen $\underline{\omega}_{\mathfrak{S}}$ modellje $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}_A}$ – nak. Az univerzum definíciója: $\omega_{\mathfrak{S}} \stackrel{\circ}{=} \{x \in S : \mathfrak{S} \models (v_1 \in \omega)[x]\}$. A műveletek és a rendezés is nyilván hasonlóan definiálhatóak $\mathfrak{S}$ – ban.

Nos, Γ minden $\mathfrak{S}$ modellje esetén minden $\sigma \in \mathcal{S}n_{\mathcal{L}_A}$ –ra (φ_S fenti rekurzív definíciójának alapján triviális formularekurzióval) belátható, hogy

$$(3) \qquad \mathfrak{S} \models \sigma_S \quad \text{iff} \quad \underline{\omega}_{\mathfrak{S}} \models \sigma\,.$$

Következésképpen,

$$(4) \qquad \underline{\omega}_{\mathfrak{S}} \models \Gamma_A \quad \text{tetszőleges } \mathfrak{S} \models \Gamma \text{ esetén,}$$

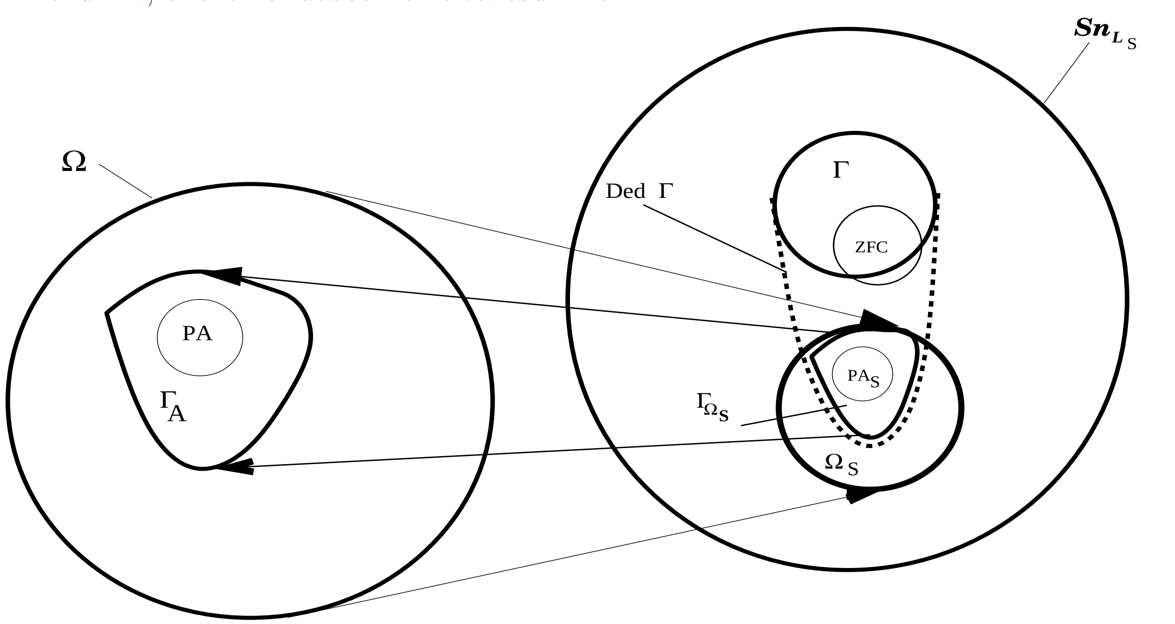
hiszen

$$\sigma \in \Gamma_A \overset{(1c)}{\rightsquigarrow} \sigma_S \in \Gamma_{\Omega_S} \overset{(1c)}{\rightsquigarrow} \sigma_S \in \mathrm{Ded}\,\Gamma \rightsquigarrow \mathfrak{S} \models \sigma_S \overset{(3)}{\rightsquigarrow} \underline{\omega}_{\mathfrak{S}} \models \sigma\,.$$

Ebből aztán az következik, hogy Γ_A deduktíve zárt, azaz $\mathrm{Ded}\,\Gamma_A = \Gamma_A$. Valóban,

$$\begin{aligned}
&\sigma \in \mathrm{Ded}\,\Gamma_A \rightsquigarrow \mathfrak{D} \models \sigma \text{ bármely } \mathfrak{D} \models \Gamma_A \text{ esetén } \rightsquigarrow \\
&\underset{(4)-el \quad \mathfrak{D} = \underline{\omega}_{\mathfrak{S}}\text{-ra}}{\rightsquigarrow} \quad \underline{\omega}_{\mathfrak{S}} \models \sigma \text{ bármely } \mathfrak{S} \models \Gamma \text{ esetén } \rightsquigarrow \\
&\underset{(3)}{\rightsquigarrow} \mathfrak{S} \models \sigma_S \text{ bármely } \mathfrak{S} \models \Gamma \text{ esetén } \rightsquigarrow \\
&\rightsquigarrow \Gamma \vdash \sigma_S \overset{(1c)}{\rightsquigarrow} \sigma_S \in \Gamma_{\Omega_S} \overset{(1c)}{\rightsquigarrow} \sigma \in \Gamma_A\,.
\end{aligned}$$

Nomármost, tudjuk, hogy $\Gamma \vdash PA_S \rightsquigarrow PA_S \subseteq \Gamma_{\Omega_S} \rightsquigarrow PA \subseteq \Gamma_A = \mathrm{Ded}\,\Gamma_A$. Így (4)–el Γ_A konzisztens kiterjesztése PA_S–nek, tehát nem eldönthető, azaz $\mathrm{Ded}\,\Gamma_A = \Gamma_A$ nem rekurzív, ellentmondásban a feltevésünkkel.



QED

Következmény

ZF konzisztens rekurzív kiterjesztései nem teljesek.

Állítás (AZ ARITMETIKA ω – NEMTELJESSÉGE)

Legyen Γ Q_0 tetszőleges helyes kiterjesztése. Ekkor van olyan $\varphi \in \mathcal{F}m^1$, hogy

$$\Gamma \vdash \varphi(n) \quad \text{minden } n \in \omega \text{ esetén, de } \quad \Gamma \nvdash (\forall x)\varphi(x)\,.$$

Bizonyítás.

Gödel – tétel bizonyításának jelöléseivel és eredményével:

$$\text{(1)} \qquad \Gamma \nvdash \neg\,\mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda))\,,$$

ahol $\mathsf{Pr}_\Gamma = \mathsf{Pr}_\Gamma(y) \in \Sigma_1 \rightsquigarrow$ van $\psi(x,y) \in \Delta_0$, hogy $\mathsf{Pr}_\Gamma(y) = (\exists x)\psi(x,y)$.[16] Megmutatjuk, hogy $\varphi(x) \triangleq \neg\,\psi(x, g(\lambda))$ a kívánt tulajdonságú. Valóban, egyrészt,

$$\text{(2)} \qquad \vdash \neg\,\mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda)) = \neg\,(\exists x)\psi(x,g(\lambda)) \Longleftrightarrow (\forall x)\neg\,\psi(x,g(\lambda)) = (\forall x)\varphi(x)\,.$$

Így (1) – el persze

$$\Gamma \nvdash (\forall x)\varphi(x)\,.$$

Másrészt (2) – vel

$$\underline{\omega} \models \neg\,\mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda)) \Longleftrightarrow (\forall x)\varphi(x)\,.$$

De tudjuk, hogy $\underline{\omega} \models \neg\,\mathsf{Pr}_\Gamma(g(\lambda))$ (lásd 3.2 – ben a Gödel – tétel utáni Következmény (ii) – t), így

$$\underline{\omega} \models (\forall x)\varphi(x)\,,$$

azaz minden $n \in \omega$ – ra:

$$\underline{\omega} \models \varphi(n)\,.$$

De $\psi(x,y) \in \Delta_0 \rightsquigarrow \varphi(n) = \neg\,\psi(n, g(\lambda)) \in \Delta_0$, vagyis Q_0 Σ – teljességével, minden $n \in \omega$ – ra:

$$Q_0 \vdash \varphi(n) \rightsquigarrow \Gamma \vdash \varphi(n)\,.$$

QED

[16] Persze nyilván lényegében $\psi(x,y) = x\,\mathsf{Prf}_\Gamma(y)$.