Lineáris differenciálegyenlet rendszer megoldása

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$\dot{x} = y$

$\dot{y} = x + e^{2t}$

ahol a kezdeti értekek: $x(0) = \frac{1}{3}, \quad y(0) = \frac{5}{3}$.

Direkt megoldás.

1. LÉPÉS. Mátrixos alak: $\underline{\boldsymbol{y}}' = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\boldsymbol{y}} + \underline{\boldsymbol{b}}$.[1]

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

2. LÉPÉS. Homogén egyenlet. $\underline{\boldsymbol{y}}' - \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0}$ $(\underline{b} = \underline{0})$ **megoldása:**

(a) $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ **sajátértékei. A karakterisztikus egyenlet:** $\left|\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} - \boldsymbol{\lambda} \underline{\underline{\boldsymbol{I}}}\right| = \mathbf{0}$ **gyökei**:

$$\left|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right| = 0 \rightsquigarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightsquigarrow \lambda^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 .$$

(b) $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ **sajátvektorai**. **Az** $(\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} - \boldsymbol{\lambda} \underline{\underline{\boldsymbol{I}}})\, \underline{\boldsymbol{s}} = \mathbf{0}$ **homogén lineáris egyenletrendszer megoldása**:

(b1) $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b2) $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) A homogén egyenlet megoldása

(c1) Az alaprendszer: $\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}} = (\underline{\boldsymbol{s}}_1\, e^{\boldsymbol{\lambda_1 t}}\ \underline{\boldsymbol{s}}_2\, e^{\boldsymbol{\lambda_2 t}}\ \ldots\ \underline{\boldsymbol{s}}_n\, e^{\boldsymbol{\lambda_n t}})$:

$$\underline{\underline{\Psi}} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

(c2) A megoldás: $\underline{\boldsymbol{y}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}} \cdot \underline{\boldsymbol{c}}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\, e^t + c_2\, e^{-t} \\ c_1\, e^t - c_2\, e^{-t} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$x = c_1\, e^t + c_2\, e^{-t}, \quad y = c_1\, e^t - c_2\, e^{-t} .$$

(c2) Ellenőrzés. A megoldás kielégíti a homogén egyenletet.

$$\dot{x} = c_1\, e^t - c_2\, e^{-t} = y, \quad \dot{y} = c_1\, e^t + c_2\, e^{-t} = x$$

[1] Nem fog konfúziót okozni, hogy (annak érdekében, hogy a már megszokott jelöléseket alkalmazhassuk) az egyenlet megoldását $\underline{y}$-nal és ennek második komponensát y-al jelöljük, azaz $\underline{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

3. LÉPÉS. Inomogén egyenlet megoldása. Az állandók variálása: $\underline{\underline{\Psi}} \cdot \dot{\underline{c}}(t) = \underline{b}$.

(a) $\dot{\underline{c}}(t)$ meghatározása: az $\underline{\underline{\Psi}} \cdot \dot{\underline{c}}(t) = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldása.

$$(\underline{\underline{\Psi}}\ \underline{b}) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & -e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & -e^{-t} - e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & -2\,e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & -2\,e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\,e^{3t} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & -e^{-2t} & \frac{1}{2}\,e^{t} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\,e^{t} \\ 0 & -e^{-2t} & \frac{1}{2}\,e^{t} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\,e^{t} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\,e^{3t} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dot{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{t} \\ -\frac{1}{2}\,e^{3t} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \dot{c}_1 = \tfrac{1}{2}\,e^t, \quad \dot{c}_2 = -\tfrac{1}{2}\,e^{3t}.$$

(b) $\underline{c}(t)$ meghatározása, integrálás.

$$\dot{c}_1 = \tfrac{1}{2}\,e^t \rightsquigarrow c_1 = \tfrac{1}{2}\,e^t, \ \dot{c}_2 = -\tfrac{1}{2}\,e^{3t} \rightsquigarrow c_2 = -\tfrac{1}{6}\,e^{3t} \quad \text{tehát} \quad \underline{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^t \\ -\frac{1}{6}\,e^{3t} \end{pmatrix}.$$

(c) Inhomogén partikuláris meghatározása: $\underline{y} = \underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{c}(t)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{c}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^t \\ -\frac{1}{6}\,e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,e^{2t} - \frac{1}{6}\,e^{2t} \\ \frac{1}{2}\,e^{2t} + \frac{1}{6}\,e^{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\,e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow x = \tfrac{1}{3}\,e^{2t}, \quad y = \tfrac{2}{3}\,e^{2t}.$$

(d) Ellenőrzés. A megoldás kielégíti az inhomogén egyenletet.

$$\dot{x} = \tfrac{2}{3}\,e^{2t} = y, \quad \dot{y} = \tfrac{4}{3}\,e^{2t} = \tfrac{1}{3}\,e^{2t} + e^{2t} = x + e^{2t}$$

4. LÉPÉS. Inomogén egyenlet általános megoldása: a homogén általános és az inhomogén partikuláris megoldásának összege:

$$x = c_1\,e^t + c_2\,e^{-t} + \tfrac{1}{3}\,e^{2t}, \quad y = c_1\,e^t - c_2\,e^{-t} + \tfrac{2}{3}\,e^{2t}.$$

Ellenőrzés: $\dot{x} = c_1\,e^t - c_2\,e^{-t} + \frac{2}{3}\,e^{2t} = y$, $\quad \dot{y} = c_1\,e^t + c_2\,e^{-t} + \frac{4}{3}\,e^{2t} = x + e^{2t}$.

5. LÉPÉS. Kezdet érték probléma.

(a) Az $\underline{y}(a) = \underline{d}$ lineáris egyenletrendszer megoldása $\underline{c}$-re.

$$x(0) = \tfrac{1}{3}, \ \ y(0) = \tfrac{5}{3} \rightsquigarrow c_1 + c_2 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}, \ \ c_1 - c_2 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow c_1 + c_2 = 0, \ \ c_1 - c_2 = 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow c_1 = 1/2, \quad c_2 = -1/2.$$

(b) Kezdet érték probléma megoldása: az általános megoldásban az $\underline{y}(a) = \underline{d}$-ból kapott $\underline{c}$-vel.

$$\boldsymbol{x} = c_1\,e^t + c_2\,e^{-t} + \tfrac{1}{3}\,e^{2t} = \boldsymbol{\tfrac{1}{2}\,e^t - \tfrac{1}{2}e^{-t} + \tfrac{1}{3}\,e^{2t}},$$

$$\boldsymbol{y} = c_1\,e^t - c_2\,e^{-t} + \tfrac{2}{3}\,e^{2t} = \boldsymbol{\tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{1}{2}e^{-t} + \tfrac{2}{3}\,e^{2t}}.$$

(c) Ellenőrzés. A megoldás kielégíti a kezdeti érték feltételt.

$$x(0) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}, \quad y(0) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{3}.$$

Megoldás Laplace transzformációval.

Legyen $X(s) \stackrel{\circ}{=} \mathsf{L}(x(t)), \quad Y(s) \stackrel{\circ}{=} \mathsf{L}(y(t))$.

Mindkét egyenlet mindkét oldalát Laplace transzformálva majd Y-t kifejezve

(1) $sX - \dfrac{1}{3} = Y$

(2) $sY - \dfrac{5}{3} = X + \dfrac{1}{s-2}$

Az egyenletrendszer mátrixa tehát:

$$\begin{pmatrix} s & -1 & \frac{1}{3} \\ -1 & s & \frac{5}{3}+\frac{1}{s-2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & s & \frac{5}{3}+\frac{1}{s-2} \\ s & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -s & -\frac{5}{3}-\frac{1}{s-2} \\ s & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -s & -\frac{5}{3}-\frac{1}{s-2} \\ s & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -s & -\frac{5}{3}-\frac{1}{s-2} \\ 0 & -1+s^2 & \frac{1}{3}+\frac{5s}{3}+\frac{s}{s-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -s & -\frac{5(s-2)+3}{3(s-2)} \\ 0 & -1+s^2 & \frac{s-2+5s(s-2)+3s}{3(s-2)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -s & -\frac{5s-7}{3(s-2)} \\ 0 & 1 & \frac{5s^2-6s-2}{3(s-2)(s^2-1)} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5s-7}{3(s-2)} + \frac{5s^3-6s^2-2s}{3(s-2)(s^2-1)} \\ 0 & 1 & \frac{5s^2-6s-2}{3(s-2)(s^2-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{(-5s+7)(s^2-1)+5s^3-6s^2-2s}{3(s-2)(s^2-1)} \\ 0 & 1 & \frac{5s^2-6s-2}{3(s-2)(s^2-1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{s^2+3s-7}{3(s-2)(s^2-1)} \\ 0 & 1 & \frac{5s^2-6s-2}{3(s-2)(s^2-1)} \end{pmatrix} \rightsquigarrow X = \frac{s^2+3s-7}{3(s-2)(s^2-1)}, \quad Y = \frac{5s^2-6s-2}{3(s-2)(s^2-1)}.$$

Parciális törtekre bontva:

(1) $\dfrac{s^2+3s-7}{(s-2)(s^2-1)} = \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{B}{s-1} + \dfrac{C}{s+1} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \; s^2+3s-7 = A(s-1)(s+1) + B(s+1)(s-2) + C(s-2)(s-1)$.

(a) $s=1:\ -2B=-3 \rightsquigarrow B=3/2$,
(b) $s=-1:\ -6C=-9 \rightsquigarrow C=3/2$,
(c) $s=2:\ 3A=3 \rightsquigarrow A=1 \rightsquigarrow$

$$X = \frac{1/3}{s-2} + \frac{1/2}{s-1} + \frac{1/2}{s+1}$$

(2) $\dfrac{5s^2-6s-2}{(s-2)(s^2-1)} = \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{B}{s-1} + \dfrac{C}{s+1} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \; 5s^2-6s-2 = A(s-1)(s+1) + B(s+1)(s-2) + C(s-2)(s-1)$.

(a) $s=1:\ -2B=-3 \rightsquigarrow B=3/2$,
(b) $s=-1:\ -6C=9 \rightsquigarrow C=-3/2$,
(c) $s=2:\ 3A=6 \rightsquigarrow A=2 \rightsquigarrow$

$$Y = \frac{2/3}{s-2} + \frac{1/2}{s-1} - \frac{1/2}{s+1}$$

Visszatranszformálva:

$$\boldsymbol{x = \tfrac{1}{3}\,e^{2t} + \tfrac{1}{2}\,e^{t} - \tfrac{1}{2}e^{-t} \qquad y = \tfrac{2}{3}\,e^{2t} + \tfrac{1}{2}e^{t} + \tfrac{1}{2}e^{-t}}\,.$$