

1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Döntse el, hogy fennáll-e minden A és B halmaz esetén a $(A \cup B) \setminus B = A$ összefüggés! Ha nem, adjon szükséges és elégséges feltételt arra, hogy mikor áll fenn!

MO. $(A \cup B) \setminus B = A$ iff A és B diszjunktak, hiszen egyrészt $(A \cup B) \setminus B = A \rightsquigarrow$ ha $x \in A$, akkor $x \notin B$, másrészt $A \cap B = \emptyset \rightsquigarrow x \in A$ iff $x \in A \cup B$ és $x \notin B$.

2. Határozza meg az $e: x = 2 + 3t, y = 1 - t, z = -1 - t$ egyenes vetületének egyenletét az

$S: x - 3y + 2z = 1$ síkra!

MO. 1) $P_1 = e \cap S$ meghatározása: $2 + 3t - 3(1 - t) + 2(-1 - t) = 1 \rightsquigarrow -4 + 4t = 0 \rightsquigarrow t = 1 \rightsquigarrow P_1 = (5, 0, -2)$. 2) Valamely $e_1 \perp S$ -re $P_2 = e_1 \cap S$ meghatározása: Legyen $P'_2 = e(0) = (2, 1, -1) \rightsquigarrow e_1: x = 2 + t, y = 1 - 3t, z = -1 + 2t \rightsquigarrow 2 + t - 3(1 - 3t) + 2(-1 + 2t) = 1 \rightsquigarrow -4 + 14t = 0 \rightsquigarrow t = 2/7 \rightsquigarrow P_2 = 1/7(16, 1, -3)$. Ebből már a $P_2 - P_1$ irányú vetületegyenes meghatározható: $x = 5 + 16/7t, y = 1/7t, z = -2 - 3/7t$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = ?$

MO. Csendőrelvvel a határérték 1, mert: $1 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq (1 + 1)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$.

4. Milyen összefüggés van az alábbi két állítás között?

a. (a_n) konvergens

b. (a_n^2) konvergens

MO. (a_n) konvergens $\rightsquigarrow (a_n^2)$ konvergens, mert konvergens hatványai is azok, de fordítva nem igaz, csak annyi, hogy (a_n^2) konvergens $\rightsquigarrow (|a_n|)$ konvergens, például ha $a_n = (-1)^n$, akkor (a_n^2) konvergens, de persze (a_n) nem konvergens.

5. Legyen $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ?$

MO. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, mert csendőrelvvel $0 \leq |f(x)| \leq |x| \rightarrow 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, mert az $x = 1/y$

helyettesítéssel $f(1/y) = \frac{\sin y}{y} \rightarrow 1$, ha $y \rightarrow 0$, így $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(1/y) = 1$.

6. Felveszi-e maximumát az $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ függvény a $(-\infty, \infty)$ intervallumon? Ha igen, hol?

MO. Igen, az $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ pontban, ugyanis $f'(x) = \frac{1+x^2-2x(1+x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$ iff

$x = -1 \pm \sqrt{2}$ és nyilván $(1-2x-x^2)$ lefelé fordított parabóla) az $x_1 = -1 - \sqrt{2}$, $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ jelöléssel f $(-\infty, x_1]$ -en csökken, $[x_1, x_2]$ -nő, majd $[x_2, \infty)$ -n újra csökken, tehát, mivel $f(x)$ negatív a $(-\infty, -1)$ intervallumon, $f(x) \leq 0 = f(-1) \leq f(x_2)$ ha $x \leq -1$, $f(x) \leq f(x_2)$ ha $x_1 \leq -1 \leq x \leq x_2$ és $f(x) \leq f(x_2)$ ha $x_2 \leq x$.

7. Van-e szakadása, és ha igen, milyen típusú, az $f(x) = x^2 \arctg \frac{1}{x}$ $x \neq 0$, $f(0) = 0$ függvény deriváltjának az origóban?

MO. Nincs, f' folytonos az origóban, hiszen $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \arctg \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \arctg \frac{1}{x} = 0$ hisz \arctg korlátos és ugyanezen okból ha $x \neq 0$, akkor $f'(x) = 2x \arctg \frac{1}{x} + x^2 \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \arctg \frac{1}{x} - x^2 \frac{1}{1+x^2}$ így $f'(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow 0$, hisz a második tag nyilván mindenütt folytonos és az origóban 0.

8. $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = ?$

MO. $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1| \Big|_0^1 = 1 - \ln 2 - (0 - \ln 1) = 1 - \ln 2$

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Bizonyítsa be a Pythagorász tételt vektoralgebrai eszközökkel!

MO. Ha a két befogó a és b az átfogó pedig c , akkor $(a, b) = 0$ és $a + b = c$, tehát $|c|^2 = c^2 = (c, c) = (a + b, a + b) = a^2 + 2(a, b) + b^2 = a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 2^n - 4n^2 4^n}{n^4 2^n + 3n^2 4^n} = ?$

MO. $\frac{2n^4 2^n - 4n^2 4^n}{n^4 2^n + 3n^2 4^n} = \frac{2n^2 2^{-n} - 4}{n^2 2^{-n} + 3} \rightarrow -\frac{4}{3}$, mert $n^2 2^{-n} \rightarrow 0$.

3. Legyen (a_n) tetszőleges sorozat. Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik nem? Válaszát indokolja!

a) Ha (a_n) monoton és korlátos, akkor minden részsorozata konvergens. b) Ha (a_n) minden részsorozata konvergens, akkor (a_n) monoton és korlátos. c) Ha (a_n) monoton és van korlátos részsorozata, akkor konvergens. d) Ha (a_n) korlátos és van monoton részsorozata, akkor konvergens.

MO. a) Igen, a_n monoton és korlátos $\leadsto a_n$ konvergens $\leadsto a_n$ minden részsorozata konvergens. b)

Nem: van nem monoton de konvergens sorozat is, pl. $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ c) Igen: Ha a_n monoton és van korlátos részsorozata, akkor a_n korlátos (hisz ellenkező esetben van a_{n_k} -nak (pl. a_n növekedő esetén) ∞ -hez konvergáló $a_{f(n)}$ részsorozata, azaz tetszőleges P esetén van N , hogy minden $n > N$ -re $a_{f(n)} > P$, amiből a monotonitás miatt minden $n > f(N + 1)$ -re $a_n > a_{f(N+1)} > P$, vagyis $a_n \rightarrow \infty$ adódik. d) Nem: két monoton különböző hatéértékhez tartó sorozat összefésülése, pl. $a_n = (-1)^n$, ellenpéldát szolgáltat.

4. Invertálható-e az $f(x) = e^{\sin x}$ függvény a $I = [\pi/4, \pi/2]$ intervallumon? Ha igen, egyenletesen folytonos-e az inverze f^{-1} -n?

MO. Igen, invertálható, mert kölcsönösen egyértelmű függvények összetett függvénye is triviálisan kölcsönösen egyértelmű és folytonos inverze is folytonos, így zárt intervallumon egyenletesen folytonos.

5. Adja meg azt a legkisebb pozitív egész n -et (ha van ilyen), melyre a következő f függvény deriválható az origóban: $f(x) = 0$ ha $x \leq 0$ és $f(x) = x^n$ ha $x > 0$.

MO. $n = 2$, mert ha $n > 1$, akkor f jobb- és baloldali deriváltja megegyezik az origóban, hisz $f'_+(0) = nx^{n-1}|_{x=0} = 0 = f'_-(0)$, tehát ekkor f deriválható itt, de ha $n = 1$, akkor ez nem igaz, mert $f'_+(0) = 1 \neq 0 = f'_-(0)$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = ?$

MO. L'Hospitallal: $x e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \sim \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}} \rightarrow \infty$ ha $x \rightarrow 0^+$ **vagy:** $y = \frac{1}{x}$ helyettesítéssel: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y} = \infty$

mert L'Hospitallal $\frac{e^y}{y} \sim \frac{e^y}{1} \rightarrow \infty$ ha $y \rightarrow \infty$.

7. $\int \frac{x}{1+x^2} = ?$

MO. $\int \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int 2x \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) (= \ln \sqrt{1+x^2})$

8. Legyen $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ha $x \neq 0$ és $f(0) = 0$. Hol értelmezett és hol deriválható a $g(x) = \int_0^x f(t) dt$

függvény? Ha létezik, számítsa ki a $g'(\frac{2}{\pi})$ értékét!

MO. g mindenütt létezik és deriválható, mert f mindenütt folytonos és ezért $g'(x) = f(x)$ minden x -re, tehát $g'(\frac{2}{\pi}) = f(\frac{2}{\pi}) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$.

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Oldja meg a $z^6 - 2z^3 + 1 = 0$ egyenletet a komplex számok körében! **MO.** Az egyenlet nyilván $(z^3)^2 - 2z^3 + 1 = (z^3 - 1)^2 = 0$, azaz $z^3 = 1$, amiből $z_1 = 1$ és $z_{2,3} = \pm 1/2e^{j2\pi/3}$.

2. Legyen az (a^n) sorozat a következő: $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, 3, \frac{1}{8}, \frac{9}{8}, \frac{17}{8}, \frac{25}{8}, 4, \frac{1}{16}, \frac{17}{16}, \frac{33}{16}, \frac{49}{16}, \frac{65}{16}, 5, \frac{1}{32}, \frac{33}{32}, \frac{65}{32}, \dots$

a) Döntse el hogy (a_n) konvergense-e !

b) Határozza meg (a_n) sűrűsödési értékeit !

c) $\liminf(a_n) = ?$ $\limsup(a_n) = ?$

MO. Rendezzük a sorozatot az alábbi végtelen háromszög alakba:

$1, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{17}{8}, \frac{25}{8}, \frac{1}{16}, \frac{17}{16}, \frac{33}{16}, \frac{49}{16}, \frac{65}{16}, \frac{1}{32}, \frac{33}{32}, \frac{65}{32}, \dots$

Ekkor az első oszlopban egy 0-hoz tartó, a második oszlopban egy 1-hez tartó, és így tovább, az n . oszlopban egy $n - 1$ -hez tartó részsorozat van. Így a_n nem konvergens, mert több sűrűsödési értéke van, nevezetesen sűrűsödési értékei a természetes számok, tehát $\liminf(a_n) = 0$ $\limsup(a_n) = \infty$.

3. Melyek igazak és melyek hamisak az alábbi állítások közül ?

a) Minden korlátos sorozatnak van monoton részsorozata

b) Minden monoton sorozatnak van korlátos részsorozata

c) Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata

d) Minden konvergens sorozatnak van korlátos részsorozata

MO. a) Igaz, mert *minden* sorozatnak van monoton részsorozata (lásd a Bolzano-Weierstrass tétel első felének "csúcsos" bizonyítását). b) Nem igaz, pl. $a_n = n$ c) Igaz: Bolzano-Weierstrass tétel d) Igaz, mert minden konvergens sorozat maga is korlátos, így *minden* részsorozata korlátos.

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - 8x} = ?$

MO. $x - \sqrt{x^2 - 8x} = \frac{8x}{x + \sqrt{x^2 - 8x}} = \frac{8}{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{x}}} \rightarrow \frac{8}{1 + 1} = 4$ ha $x \rightarrow \infty$.

5. Döntse el, hogy korlátos-e az $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{e^x}$ függvény az $I = [1, \infty)$ intervallumon!

MO. Igen: egyrészt $f(x)$ pozitív I -n, másrészt L'Hospitallal $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, így van $P > 1$, hogy $0 < f(x) < 1$ minden $x > P$ -re és az $I' = [1, P]$ intervallumon $f(x)$ folytonossága miatt korlátos. Végül nyilván I' -beli korlátja és 1 közül a nagyobb korlátja lesz I -n is.

6. Bizonyítsa be, hogy minden $x > 0$ esetén $1 - x < \frac{1}{1+x} < 1 - x + x^2$.

MO. Legyen $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$, $h(x) = 1 - x + x^2$. Ekkor $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ és $f'(x) = -1 < -\frac{1}{(1+x)^2} = g'(x)$

ha $x > 0$. (Ez utóbbi egyenlőtlenség azért igaz, mert $g'(0) = -1 = h'(0)$ és $g''(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3} < 2 = h''(x)$ ha $x > 0$.)

7. $\int_0^\pi \sin^3 x dx = ?$

MO. $\int_0^\pi \sin^3 x dx = \int_0^\pi \sin^x \sin^2 x dx = \int_0^\pi \sin^x (1 - \cos^2 x) dx = \int_0^\pi \sin^x dx - \int_0^\pi \sin^x \cos^2 x dx = -\cos x \Big|_0^\pi + \frac{\cos^3 x}{3} \Big|_0^\pi = 2 - 2\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2} dt = ?$

MO. Legyen $f(x) = e^{x^2}$ és $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Ekkor $F(0) = 0$ és így f folytonossága miatt

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0) = e^{x^2} \Big|_{x=0} = e^0 = 1$.

Vagy hasonlóan L'Hospitallal f folytonossága miatt

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = e^{x^2} \Big|_{x=0} = e^0 = 1$.

4. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Mit mondhatunk az A és B halmazok viszonyáról, ha $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \emptyset$.

MO. $A = B$, ugyanis $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \emptyset \rightsquigarrow A \cap \overline{B} = \{x \in A \mid x \notin B\} = \emptyset$, ami viszont azt jelenti, hogy: $x \in A \rightsquigarrow x \in B$, azaz $A \subseteq B$ és persze ugyanígy adódik az is, hogy $B \subseteq A$.

2. Legyenek (a_n) és b_n a következő sorozatok: $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n}$ tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén. Adjunk meg olyan (c_n) és (d_n) sorozatokat, ha vannak ilyenek, hogy (c_n) sűrűsödési értékei pontosan a_n elemei és (d_n) sűrűsödési értékei pontosan b_n elemei!

MO. c_n például a következő:

$$1 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}, 3 + \frac{1}{3}, \dots$$

$$1 + \frac{1}{k}, 2 + \frac{1}{k}, 3 + \frac{1}{k}, \dots, k + \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k+1}, \dots$$

A feltételnek megfelelő d_n sorozat nem létezik, mert b_n egyetlen sűrűsödési értéke, a nulla is szükségképpen előfordul bármely olyan (x_n) sorozat sűrűsödési értékei között, melynek b_n összes eleme sűrűsödési értéke, hisz nullához bármilyen közel esik (b_n) -nek eleme, melyhez bármilyen közel van (x_n) -nek eleme. Másszóval, ha (x_n) sűrűsödési értékei (b_n) elemei, akkor (x_n) sűrűsödési értéke a nulla is, mely (b_n) -nek nem eleme.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = ?$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n} = ?$

MO. $\sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2 \rightarrow 1^2 = 1$, és csendőrelvvel $\sqrt[n^2]{n}$ is 1-hez tart mert $1 \leq \sqrt[n^2]{n} \leq \sqrt[n^2]{n^2} \rightarrow 1$ hiszen $\sqrt[n^2]{n^2}$ az

4. Legyen $f(x) = \arctg x$ és $g(x) = \arctg \frac{1}{x}$. Adjon példát olyan (x_n) sorozatra, ha van ilyen, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ továbbá

a) $(f(x_n))$ konvergens és $(g(x_n))$ konvergens

b) $(f(x_n))$ divergens és $(g(x_n))$ divergens

c) $(f(x_n))$ divergens és $(g(x_n))$ konvergens

d) $(f(x_n))$ konvergens és $(g(x_n))$ divergens

MO. Átviteli elv alapján mivel f folytonos az origóban, míg g -nek ugrása van itt: a) $x_n = \frac{1}{n}$, b) c) ilyen nincs d) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \sin e^{-x} = ?$

MO. $e^x \sin e^{-x} = \frac{\sin e^{-x}}{e^{-x}}$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$, így az $y = e^{-x}$ helyettesítéssel $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \sin e^{-x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. \forall

6. Ábrázolja vázlatosan az $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$ függvényt legfontosabb jellemző értékeinek feltüntetésével!

MO.

7. Legyen $f(x) = \cos \frac{1}{\cos \frac{x}{\pi}}$. Létezik-e az alábbiak közül egy vagy több integrál?

$$\int_{-\frac{1}{\pi}}^{\frac{1}{\pi}} f(x) dx \quad \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} f(x) dx \quad \int_{\frac{3}{\pi}}^{\frac{5}{\pi}} f(x) dx$$

MO. Igen, mind a három létezik, mert a) f korlátos és szakadási helyei az intervallum egy pontjában, az origóban torlódnak, b) f korlátos és az intervallum egy pontja kivételével folytonos, c) f folytonos az intervallumon.

8. $\int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx = ?$

MO. $\int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx = \int_{\frac{1}{e}}^e 1 \cdot \ln x dx = |x \cdot \ln x|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e 1 dx = e + \frac{1}{e} - (e - \frac{1}{e}) = \frac{2}{e}$.

5. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Bizonyítsa be vektoralgebrai eszközökkel a Thálesz tételt!

MO. A középpontból irányítva a kör egy-egy pontjához húzott helyvektorok legyenek r_1 és r_2 . Mivel az r_1 végpontjához tartozó átmérő másik végpontjának helyvektora $-r_1$, így belátandó, hogy $r_1 - r_2 \perp (-r_1) - r_2$, azaz $(r_1 - r_2, -r_1 - r_2) = 0$. De $(r_1 - r_2, -r_1 - r_2) = -(r_1 - r_2, r_1 + r_2) = r_1^2 - r_2^2 = 0$, hiszen $|r_1| = |r_2|$ a kör sugarának hossza.

2. Bizonyítsa be, hogy bármely A, B, C halmazok esetén

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

MO. $a \cdot \overline{(b \cdot \bar{c})} = a(\bar{b} + \bar{c}) = a(\bar{b} + c) = a \cdot \bar{b} + a \cdot c$

3. Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik nem?

a) Ha a_n konvergens $(a_n)^n$ is konvergens

b) Ha a_n divergens $(a_n)^n$ is divergens

c) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$

d) Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

MO. a) nem: $a_n = 2$ b) nem: $a_n = \frac{1}{2}$ a $b_n = \frac{1}{2}$ és a $c_n = \frac{1}{3}$ sorozatok összefésülésével keletkezett sorozat. c) nem: $1 + \frac{1}{n}$ d) igen: $a_n \rightarrow 1 \rightsquigarrow$ végülis $\frac{1}{2} \leq (a_n)^n \leq 2 \rightsquigarrow 1 \leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{2} \rightarrow 1$, amiből csendőrelvvel $a_n \rightarrow 1$.

4. Legyen $a > 0$ tetszőleges valós szám. Határozza meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2a^n}{2 - 3a^n}$$

határértéket a függvényében!

MO. Három eset van: a) Ha $a > 1$, akkor $\frac{1 + 2a^n}{2 - 3a^n} = \frac{(\frac{1}{a})^n + 2}{2(\frac{1}{a})^n - 3} \rightarrow -\frac{2}{3}$, b) ha $a = 1$, akkor $\frac{1 + 2a^n}{2 - 3a^n} = \frac{3}{-1} = -3 \rightarrow 3$ és végül b) ha $a < 1$, akkor $\frac{1 + 2a^n}{2 - 3a^n} \rightarrow \frac{1}{2}$.

5. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény a $[0, \infty)$ intervallumon?

MO. Igen: egyrészt f folytonos így egyenletesen folytonos az $I_1 = [0, 2]$ intervallumon, másrészt $|f'(x)| = |\frac{1}{2\sqrt{x}}| \leq 1$ ha $x \geq 2$, tehát f' korlátos az $I_2 = [1, \infty)$ intervallumon, így f egyenletesen folytonos I_2 -n, következésképp f egyenletesen folytonos I_1 és I_2 egyesítésén, hiszen nyilván itt az adott ε -hoz a két részintervallumon található 1-nél kisebb δ -ák közül a kisebb jó lesz.

6. Hol és milyen szakadása van az

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

függvénynek?

MO. Ugrása: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{1 + e^y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-y} + 1} = 1 \neq 0 = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{e^y}{1 + e^y} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

7. Legyen $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$. Van-e valós gyöke f -nek? Ha igen, van-e pozitív gyöke?

MO. Van, páratlan fokszámú polinomnak mindig van valós gyöke. Pozitív gyöke azonban nincs, mert $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = (x-1)(x+3) \rightsquigarrow x \geq 1$ esetén $f'(x) \geq 0$ és $-3 \leq x \leq 1$ esetén $f'(x) \leq 0 \rightsquigarrow f(x) \geq f(1) = 3 > 0$ ha $x \in [-3, \infty)$.

8. Van-e primitív függvénye az $f(x) = x^2 e^x$ függvénynek? Ha igen, határozzon meg egyet!

MO. $\int x^2 e^x = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx) = e^x(x^2 - 2x + 2)$

6. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Mely z komplex számokra igaz, hogy $z + \bar{z} = 2\sqrt{2}$ és $z \cdot \bar{z} = 4$.

MO. Legyen $\operatorname{Re} z = x$ és $\operatorname{Im} z = y$. Ezekkel $x = \sqrt{2}$ és $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 = 2 + y^2 = 4 \rightsquigarrow y^2 = 2 \rightsquigarrow y = \pm\sqrt{2} \rightsquigarrow z = \sqrt{2}(1 \pm j)$

2. Határozza meg a $P = (1, 1, 1)$ ponton és az $e: x = 1 + t, y = 1 - t, z = -1 + t$ egyenesen átfektetett S sík egyenletét!

MO. Legyen $P' = (1, 1, -1) \in e$ és $a = \overline{PP'}$ $= (0, 0, 2)$, továbbá e irányvektora $v = (1, -1, 1)$. S normálvektora $a \times v = (2, 2, 0)$, így S egyenlete: $2(x - 1) + 2(y - 1) = 0 \rightsquigarrow x + y = 2$.

3. Adjon példát olyan számsorozatra – ha létezik ilyen –, melyre igaz, hogy

(a) nincs véges sűrűsödési értéke (b) egyetlen véges sűrűsödési értéke van és nem konvergens (c) nincs sem véges sem végtelen sűrűsödési értéke (d) nincs végtelen sűrűsödési értéke és nem konvergens

MO. (a) $a_n = n$ (b) (a_n) a $b_n = n$ és a $c_n = \frac{1}{n}$ összefésülésével keletkezett sorozat (c) ilyen nincs: ha egy sorozat korlátos, akkor van konvergens részsorozata, ha pedig nem korlátos, akkor van végtelenbe divergáló részsorozata (d) $a_n = (-1)^n$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}) = ?$

MO. $1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = -\frac{\frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \rightsquigarrow n \cdot (1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}) = -\frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}$

5. Az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik nem? Válaszát indokolja!

(a) Ha egy függvény felveszi minimumát és maximumát egy korlátos intervallumon, akkor folytonos ott

(b) Ha egy függvény folytonos egy korlátos intervallumon, akkor felveszi minimumát és maximumát ott

(c) Ha egy függvény nem veszi fel sem minimumát sem maximumát egy korlátos intervallumon, akkor nem korlátos ott (d) Ha egy függvény nem korlátos egy korlátos intervallumon, akkor vagy minimumát vagy maximumát nem veszi fel ott

MO. a) nem: $f(x) = \operatorname{sign} x$ a $[-1, 1]$ -en, b) nem: $f(x) = x$ a $(-1, 1)$ -en. c) nem: $f(x) = x$ a $(-1, 1)$ -en.

d) igaz, ellenkező esetben az intervallumon: $\min f(x) = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = \max f(x)$.

6. Legyen $f(x) = x|x|$. Határozza meg az f' deriváltfüggvényt, ahol az létezik, és állapítsa meg, hol deriválható az f' deriváltfüggvény.

MO. $f(x) = -x^2$ ha $x < 0$ és $f(x) = x^2$ ha $x \geq 0$, így $f'(x) = -2x$ ha $x < 0$, $f'(0) = 0$ $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| \rightarrow 0 \right)$ és $f'(x) = 2x$ ha $x > 0$ azaz $f'(x) = 2|x|$ így f' az origóban nem, az origó kivételével azonban mindenütt deriválható.

7. Bizonyítsa be, hogy az $y = e^x$ egyenletű görbe $x = 1$ pontbeli érintője átmegy az origón!

MO. Az érintő egyenlete: $y - e = e(x - 1) \rightsquigarrow y = ex$, mely átmegy az origón.

8. $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = ?$

MO. $t = e^x$ -el $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t} \rightsquigarrow \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int \frac{t}{1 + t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{1 + t} dt = \ln|1 + t| = \ln(1 + e^x)$

7. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Mit mondhatunk az A, B halmazok viszonyáról, ha $A \cap B = A \cup B$.

MO. $A = B$, ugyanis $x \in A \rightsquigarrow x \in A \cup B \rightsquigarrow x \in A \cap B \rightsquigarrow x \in B$, vagyis $A \subseteq B$ és ugyanígy fordítva, azaz $B \subseteq A$, tehát $A = B$, **vagy:** $ab \leq a \leq a + b = ab \rightsquigarrow a = ab$ és ugyanígy fordítva, azaz $b = ab$, tehát $a = ab = b \rightsquigarrow a = b$.

2. Állapítsa meg, hogy az

$$e_1: x = 1 + t, y = 1 - t, z = -1 + t$$

és az

$$e_2: x = 1 - t, y = 1 - 2t, z = -1 - t$$

egyenesek egy síkban vannak-e, és ha igen, határozza meg ezen sík egyenletét!

MO. Igen, mert a két egyenes metszi egymást a $P = (1, 1, -1)$ pontban ($x = 1 + t, y = 1 - t, z = -1 + t, x = 1 - \lambda, y = 1 - 2\lambda, z = -1 - \lambda \rightsquigarrow 1 + t = 1 - \lambda, 1 - t = 1 - 2\lambda \rightsquigarrow t = -\lambda = -t/2, \rightsquigarrow t = \lambda = 0, \rightsquigarrow x = 1, y = 1, z = -1$). Legyen $v_1 = (1, -1, 1)$ az e_1 és $v_2 = (-1, -2, -1)$ az e_2 irányvektora. A keresett S sík normálvektora $n = v_1 \times v_2 = (3, 0, -3)$, amivel S egyenlete: $3(x - 1) - 3(z + 1) = 0 \rightsquigarrow x - z = 2$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n} = ? \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{n} = ?$

MO. $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{2} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$ és csendőrelvvel $\sqrt[2n]{n}$ is 1-hez tart mert

$1 \leq \sqrt[2n]{n} \leq \sqrt[n]{2n} \rightarrow 1$, hiszen $\sqrt[2n]{2n}$ az $\sqrt[n]{n}$ részsorozata, **vagy** $\sqrt[2n]{n} = \sqrt{\sqrt[n]{n}} \rightarrow \sqrt{1} = 1$.

4. Az $(a_n), (b_n)$ számsorozatokra vonatkozó alábbi következtetések közül melyik igaz és melyik nem? Válaszait indokolja!

(a) Ha $(a_n \cdot b_n)$ konvergens, akkor (a_n) is és (b_n) is konvergens

(b) Ha (a_n) is és (b_n) is konvergens, akkor $(a_n \cdot b_n)$ is konvergens

(c) Ha $(a_n \cdot b_n)$ konvergens, akkor vagy (a_n) vagy (b_n) konvergens

(d) Ha (a_n) vagy (b_n) konvergens, akkor $(a_n \cdot b_n)$ is konvergens

MO. (a) Nem igaz, pl. $a_n = b_n = (-1)^n$ (b) igaz, konvergencia invariáns az alapműveletekre nézve

(c) nem igaz, lásd (a) (d) nem igaz, pl. $a_n = n^2$ és $b_n = \frac{1}{n}$, vagy $a_n = (-1)^n$ és $b_n = (1 + \frac{1}{n})$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = ?$

MO. Kétszer L'Hospitallal: $\frac{\sin x - x}{x^3} \sim \frac{\cos x - 1}{3x^2} \sim \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6}$.

6. Ábrázolja vázlatosan az $f(x) = xe^x$ függvényt legfontosabb jellemző értékeinek feltüntetésével!

MO. $f'(x) = (x + 1)e^x$. Az ábrát lásd a túloldalon.

7. Bizonyítsa be, hogy

$$e \cdot x < e^x \quad \text{ha } x > 1$$

MO. Legyen $f(x) = e \cdot x$ és $g(x) = e^x$. Ezzel $f(1) = e = g(1)$ és $f'(x) = e = e^1 < e^x = g'(x)$ ha $x > 1$, hiszen e^x szigorúan monoton növekedő, amiből a Lagrange középértéktétellel készen vagyunk. (Valóban, a tételt a $h(x) = g(x) - f(x)$ függvényre alkalmazva: ha $x > 1$, akkor valamely $c > 1$ -re $\frac{h(x)}{x - 1} = \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(c) = g'(c) - f'(c) > 0 \rightsquigarrow h(x) > 0$.)

8. $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = ?$

MO. $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, dx - \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{2\pi} = \pi - 0 - (0 - 0) = \pi$.

1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998/99 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Legyen E tetszőleges halmaz. Mely $A, B \subseteq E$ halmazokra áll fenn, hogy $A \cap \bar{B} = \emptyset$ és $A \cup \bar{B} = E$? Állítását indokolja!

MO. $A = B$, mert $x \in A \rightsquigarrow x \notin \bar{B} \rightsquigarrow x \in B \rightsquigarrow x \notin \bar{B} \rightsquigarrow x \in A$, vagyis $x \in A$ iff $x \in B$.

2. Határozza meg a következő határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^3}$

MO. a) e^2 , mert az $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \rightarrow e^2$ részsorozata.

b) ∞ , mert $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^3} = \left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n\right)^{n^2} \geq 2^{n^2} \rightarrow \infty$, hisz $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n \rightarrow e^3 > 2$.

3. Létezik-e, és ha igen mennyi a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x$?

MO. $\sin x \cdot \ln x = \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x \rightarrow 0$ ha $x \rightarrow 0^+$,

mert ha $x \rightarrow 0^+$, akkor $x \cdot \ln x \rightarrow 0$ és $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.

4. Egyenletesen folytonos-e a az $f(x) = x^3$ függvény az $I = (0, 1)$ intervallumon?

MO. Igen, f folytonos a $[0, 1]$ zárt intervallumon, így ezen és vele persze ennek minden részintervallumán, köztük I -n is egyenletesen folytonos.

5. Van-e gyöke az $x^{100} - 100x - 1 = 0$ egyenletnek és ha igen hány?

MO. Legyen $f(x) = x^{100} - 100x - 1$, $f'(x) = 100x^{99} - 100$. Ez pontosan akkor nulla, ha $x^{99} = 1$ azaz ha $x = 1$ és itt monoton növekvő módon vált előjelet a derivált, tehát minimuma van. A függvény a minimumhely előtt szigorúan monoton csökkenő, utána szigorúan monoton növekvő és mindkét végtelenben a határértéke plusz végtelen, tehát $f(1) < 0$ és a folytonosság miatt Bolzano tétellel pontosan két gyöke van.

6. $\int_0^1 x e^x dx = ?$

MO. Parciális integrálással: $\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$.

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998/99 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Adjon meg két olyan pontot, mely rajta van az $x - y + 2z = -3$, $2x + y + 2z = 1$ síkok metszésvonalán!

MO. Pl. $x = 0$ -val $-y + 2z = -3$, $y + 2z = 1$, amiből $4z = -2$, tehát $y = 2$, így $P_1 = (0, 2, -\frac{1}{2})$ és ugyanígy pl. $y = 0$ -val $x + 2z = -3$, $2x + 2z = 1$, amiből $x = 4$, tehát $z = -\frac{7}{2}$, így $P_2 = (4, 0, -\frac{7}{2})$. VAGY: Másodikból az első levonva: $x + 2y = 4$, így $y = t$, $x = 4 - 2t$, $z = 0.5(2 - 2x - y) = 0.5(1 - 8 + 4t - t) = -\frac{7}{2} + \frac{3}{2}t$ a metszésvonal, tehát pl. $t = 1, 3$ -al: $P_1 = (2, 1, -2)$, $P_2 = (-2, 3, 1)$.

2. Határozza meg a következő határértékeket! a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^n$

MO. a) ∞ , mert $\left(2 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2} \geq 2^{n^2} \rightarrow \infty$. **b)** 1 , mert $1 \leq \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 9^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$,

mert $\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2} \rightarrow e^2 \leq 3^2 \leq 9$, hiszen az $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \rightarrow e^2$ részsorozata.

3. Legyen $f(x) = e^x$ és $g(x) = f(f(f(\frac{1}{x})))$ ($x \neq 0$), $g(0) = 0$. Hol nem folytonos a g függvény, és itt milyen szakadása van?

MO. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{e^y} = \lim_{z \rightarrow \infty} e^z = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{e^y} = \lim_{z \rightarrow 0} e^{e^z} = \lim_{w \rightarrow 1} e^w = e$, tehát az origóban másodfajú szakadása van, másutt folytonos, mert elemi függvény.

4. Legyen n tetszőleges nemnegatív egész. Határozza meg a $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x}$ határértéket!

MO. L'Hospitalt felhasználva, n -re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$ minden természetes n -re. Valóban $n = 0$ esetén $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. Másrészt, $n \geq 1$ -re $x^n e^{-x} = \frac{x^n}{e^x} \sim \frac{nx^{n-1}}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ az indukciós hipotézis alapján.

5. Ábrázolja vázlatosan a gyökök, a szakadási helyeken és a végtelenben vett határértékek és a szélsőérték-helyek meghatározása alapján az $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ függvényt!

MO. Csak az $x = 1$ -ben szakad. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $f'(x) = \frac{x(2-x)}{(x-1)^2}$, ami az origóban növekedően, $x = 2$ -ben csökkenően vált előjelet, így lokális minimuma van az origóban, $f(0) = 0$, lokális maximuma pedig az $x = 2$ -ben, $f(2) = -4$.

6. Legyen $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$. Van-e primitív függvénye f -nek a $[-1, 1]$ intervallumon?

MO. f mindenütt folytonos (origón kívül elemi függvény, origóban korlátos és nullához tartó szorzataként nullához tart), így minden integrálfüggvénye primitív függvénye, és ez szintén a folytonosság miatt mindenütt létezik.

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998/99 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Adja meg összes olyan komplex számot, melyre $z^3 + \frac{1}{j^3} = 0$.

MO. $\frac{1}{j^3} = \frac{1}{-j} = j$ így $z^3 + \frac{1}{j^3} = 0$ iff $z^3 = -j$ iff $z = j$ vagy $z = je^{j2\pi/3} = e^{j7\pi/6}$
vagy $z = je^{j4\pi/3} = e^{j11\pi/6}$

2. Határozza meg a következő határértékeket!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n}\right)^n$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)^{n^2}$

MO. a) 0, mert $\frac{1}{2} + \frac{2}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$ miatt van $q < 1$, hogy elég nagy n -re $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n}\right)^n \leq q^n \rightarrow 0$.

b) $\sqrt{1/e}$, mert az $\left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \rightarrow e^c$ részsorozata $c = -1/2$ -al.

3. $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x+1) \cdot \ln x = ?$

MO. $\ln(x+1) \cdot \ln x = \frac{\ln(x+1)}{x} \cdot x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 0$ mert $\frac{\ln(x+1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 1$ és $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 0$.

VAGY L'Hospitaltal: $\ln(x+1) \cdot \ln x = \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{\ln x}} \sim \frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln^2 x}} = -\frac{1}{x+1} \cdot x \ln^2 x \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 0$

4. Egyenletesen folytons-e az $f(x) = x$ függvény a $[0, \infty)$ intervallumon?

MO. Igen, mert a definícióból tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz a $\delta = \varepsilon$ jó választás, hiszen: $\forall x, y \in [0, \infty)$ -re $|f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon$ ha $|x - y| < \varepsilon$. VAGY: $f'(x) = 1$ korlátos az egész intervallumon.

5. Adjon meg egy olyan nem üres intervallumot, ahol az $f(x) = x^5 - 80x$ függvény invertálható!

MO. $f'(x) = 5x^4 - 80 = 0 \rightsquigarrow x^4 = 16 \rightsquigarrow x = \pm 2$, így $x > 2$ és $x < -2$ esetén szigorúan monoton növekvő, $[-2, 2]$ -n szigorúan monoton csökkenő, tehát ezeken az intervallumokon invertálható.

6. $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = ?$

MO. $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, dx + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi + 0 = \pi$.

1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1999/2000 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Metszik-e az alábbi egyenesek egymást, és ha igen hol?

$$e_1 : x = 1 + t, y = -1 + 2t, z = 2 - t; \quad e_2 : x = 2 + t, y = 3 + t, z = 1 - t$$

$$\text{MO. } x_1 = x_2, y_1 = y_2 \rightsquigarrow 1 + t = 2 + s, -1 + 2t = 3 + s \rightsquigarrow t = 1 + s, s = -4 + 2t \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow t = -3 + 2t \rightsquigarrow t = 3, s = 2 \rightsquigarrow P = (4, 5, -1) \in e_1 \cap e_2$$

2. Igazak-e a következő állítások?

a. Ha (a_n) és (b_n) divergens, akkor $(a_n b_n)$ is divergens

b. Ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor $(a_n b_n)$ divergens

c. Ha (a_n) divergens és $(a_n b_n)$ konvergens, akkor (b_n) konvergens

d. Ha (a_n) konvergens és $(a_n b_n)$ konvergens, akkor (b_n) konvergens

MO. a. Nem: $a_n = b_n = (-1)^n$; b. Nem: $a_n = \frac{1}{n}, b_n = (-1)^n$; c. Nem: lásd a.;

d. Nem: lásd b.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = ?$

$$\text{MO. } \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x} - 2e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

4. Az alábbi intervallumok közül melyeken egyenletesen folytonos az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény?

$$I_1 = (0, 1), I_2 = [0, 1], I_3 = [1, \infty)$$

MO. Mindhárom: a) Heine-tétellel mert $f \in C(I_2)$ és I_2 zárt korlátos intervallum,

b) $I_1 \subseteq I_2$, c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightsquigarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ ha $x \in I_3 \rightsquigarrow f'$ korlátos I_3 -on.

5. Legyen $f(x) = x^{(e^x)}$ minden $x > 0$ -ra. $f'(x) = ?$

MO.

$$f(x) = e^{\ln f(x)} \rightsquigarrow \ln f(x) = e^x \ln x \rightsquigarrow f'(x) = f(x)(\ln f(x))' = f(x)(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}) = f(x)e^x(\ln x + \frac{1}{x})$$

6. $\int_1^e x^2 \ln x \, dx = ?$

$$\text{MO. } \int_1^e x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^3}{9} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1999/2000 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Bizonyítsa be, hogy bármely A, B és C halmazokra $A \cap \overline{B} \subseteq C$ -ből következik, hogy $\overline{C} \subseteq \overline{A} \cup B$.

MO. $A \subseteq B$ iff $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ és de Morgan. VAGY közvetlenül: $x \in \overline{C} \rightsquigarrow x \notin C \rightsquigarrow x \notin A \cap \overline{B} \rightsquigarrow x \notin A$ vagy $x \notin \overline{B} \rightsquigarrow x \in \overline{A}$ vagy $x \in B \rightsquigarrow x \in \overline{A} \cup B$.

2. Legyen (a_n) pozitív tagú számsorozat. Igaz-e, hogy ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor (a_n) konvergens? Igaz-e ennek az állításnak a megfordítása?

MO. Nem, pl. ha $a_n = n^r$ bármely racionális $r > 0$ -ra, mert ekkor $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^r}{n^r} = (1 + \frac{1}{n})^r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, de persze $r > 0$ esetén $a_n = n^r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, azaz a_n nem konvergens. A megfordítás sem igaz, pl. ha

$a_n = q^n$, ahol $0 < q < 1$ akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 1$, VAGY ha $a_n = \frac{1}{n^n}$, akkor is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ és } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} \rightarrow \frac{1}{e} \neq 1.$$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{-x} + 2x^2e^{-2x}}{3xe^{-x} + 4x^2e^{-2x}} = ?$

MO. $\frac{xe^{-x} + 2x^2e^{-2x}}{3xe^{-x} + 4x^2e^{-2x}} = \frac{1 + 2xe^{-x}}{3 + 4xe^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$ mert $xe^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

4. Melyik igaz, melyik nem:

- Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor f korlátos $[a, b]$ -n
- Ha f korlátos $[a, b]$ -n, akkor véges sok pont kivételével f folytonos $[a, b]$ -n
- Ha f folytonos (a, b) -n, akkor véges sok pont kivételével f deriválható (a, b) -n
- Ha f deriválható (a, b) -n, akkor f folytonos (a, b) -n

MO.

a) Igen: Weierstrass

b) Nem: $[0, 1]$ -en Dirichlet VAGY $f(x) = 0$ ha $x = \frac{1}{n}$ valamely $n \in \mathbb{N}$ -re és $f(x) = 1$ egyébként

c) Nem: $f(x) = |\sin \frac{1}{x}|$ $(0, 1)$ -en folytonos mert itt értelmezett elemi függvény abszolút értéke, de az $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ($n \in \mathbb{N}$) pontokban nyilván jobb- és baloldali deriváltjai nem egyenlőek, VAGY persze pl. egy olyan 1 magas egyenlőszárú háromszögekből álló végtelen sorozat, amelynél a háromszögek alapjai rendre

az $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ ($n \in \mathbb{N}$) intervallumok

d) Igen: $f(x+h) - f(x) = h \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \cdot f'(x) = 0$

5. Legyen $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$ ha $x \neq 0$ és $f(0) = 0$. Hol deriválható az f függvény? $f'(x) = ?$

MO. Mindenütt, mert

a) az origón kívül itt értelmezett elemi függvény

b) az origóban: $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h \operatorname{arctg} \frac{1}{h^2} - 0}{h} = \operatorname{arctg} \frac{1}{h^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\pi}{2}$, így

$$f'(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^4}} \cdot (-2 \frac{1}{x^3}) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1 + x^2} \text{ ha } x \neq 0 \text{ és } f'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

6. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = ?$

MO. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1999/2000 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Adja meg a $(j \cdot (1 - j))^{100}$ komplex számot kanonikus alakban!

MO. $j \cdot (1 - j) = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \rightsquigarrow (j \cdot (1 - j))^{100} = (\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})^{100} = \sqrt{2}^{100} \cdot e^{100j\frac{\pi}{4}} = 2^{50} \cdot e^{25\pi j} = 2^{50} \cdot e^{j((12 \cdot 2)\pi + \pi)} = 2^{50} \cdot e^{j\pi} = -2^{50}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\sqrt{n^4 - 2n} - \sqrt{n^4 + 2n}) = ?$

MO. $n \cdot (\sqrt{n^4 - 2n} - \sqrt{n^4 + 2n}) = n \cdot \frac{n^4 - 2n - n^4 - 2n}{\sqrt{n^4 - 2n} + \sqrt{n^4 + 2n}} = \frac{-4n^2}{\sqrt{n^4 - 2n} + \sqrt{n^4 + 2n}} = \frac{-4}{\sqrt{1 - 2\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1 + 2\frac{1}{n^3}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -2$

3. Hol és milyen szakadása van az $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ függvénynek!

MO.

Ugrás az origóban: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - e^y} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - z} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - e^y} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1 - z} = 1$.

Másutt nem szakad el, mert a nevező csak $e^{\frac{1}{x}} = 1$ -re 0 és $e^y = 1$ iff $y = 0$, de $y = \frac{1}{x} \neq 0$.

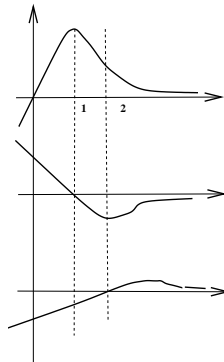
4. Melyik igaz, melyik nem? **a)** Folytonos függvény deriválható **b)** Deriválható függvény folytonos **c)** Deriválható függvény deriváltja folytonos **d)** Folytonos függvény integrálható **e)** Integrálható függvény folytonos

MO. a) Nem, pl. $f(x) = |x|$ az origóban. Valóban: legyen $g(x) = x$. Ezzel $f(x) = g(x)$ ha $x \geq 0$, és $f(x) = -g(x)$ ha $x \leq 0$, így $f'_+(0) = g'(0) = 1 \neq -1 = -g'(0) = f'_-(0)$, pedig f mint g abszolút értéke g -vel együtt folytonos. **b)** Igen $f(x+h) - f(x) = h \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \cdot f'(x) = 0$.

c) Nem: $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$. f' mindenütt létezik: $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sin \frac{1}{h} = 0$ és $x \neq 0$ -ra $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, aminek nincs határértéke az origóban. **d)** Igen **e)** Nem: pl. $\text{sign } x$.

5. Ábrázolja vázlatosan az $f(x) = x \cdot e^{-x}$ függvényt első és második deriváltjaival együtt f legfontosabb jellemzői pontjainak feltüntetésével úgy, hogy az ábrából ezeknek a pontoknak a deriváltak jellemző pontjaival való viszonya is megállapítható legyen!

MO. $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$, $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$, $f'''(x) = e^{-x}(3 - x) \rightsquigarrow f'(1) = f''(2) = f'''(3) = 0$, $f'(x) > 0$ ha $x < 1$, $f'(x) < 0$ ha $x > 1$, $f''(x) < 0$ ha $x < 2$, $f''(x) > 0$ ha $x > 2$, (spec. $f''(1) = -1 < 0$) $f'''(x) < 0$ ha $x < 3$, $f'''(x) > 0$ ha $x > 3$ (spec. $f'''(2) = 1 > 0$):



6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, dx = ?$

MO. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2000/01 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. (a) Bizonyítsa be vektoralgebrai eszközökkel a szinusz-tételt!

(b) Igaz-e, hogy $a \neq 0$ esetén $a \times b = a \times c$ -ből következik $b = c$.

MO. (a) Háromszög T területének duplája két különböző oldalpárja keresztszorzatával: $|c \times a| = 2T = |c \times b|$

$$\rightsquigarrow |c| |a| \sin \beta = |c| |b| \sin \alpha \rightsquigarrow \frac{|a|}{|b|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

(b) Nem: csak annyi következik, hogy $a \parallel b - c$, pl. $a \times b = a \times (a + b)$.

2. Határozza meg a következő határértékeket! a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^3}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{3}{n^3}\right)^{n^3}$

MO.

a) 0, mert végül $0 \leq \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^3} = \left(\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n\right)^{n^2} \leq \left(\frac{1}{10}\right)^{n^2} \rightarrow 0$,

$$\text{hisz persze } \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \rightarrow e^{-3} \approx \frac{1}{20} \leq \frac{1}{10}.$$

b) ∞ , mert végül $\left(3 - \frac{3}{n^3}\right)^{n^3} \geq 2^{n^3} \rightarrow \infty$.

3. Mutassa meg, hogy az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény egyenletesen folytonos a $[0, 2]$ és az $[1, \infty)$ intervallumokban! Igaz-e, hogy f egyenletesen folytonos az egész $[0, \infty)$ intervallumon?

MO. $[0, 2]$: Heine. $[1, \infty)$ -en deriváltja korlátos: $|f'(x)| = \left|\frac{1}{3x^{2/3}}\right| \leq \frac{1}{3}$ ha $x \geq 1$. Így persze az egész jobb félegyenesen is egyenletesen folytonos, hisz adott ε -hoz a két részintervallumon létező δ -áknál és 1-nél kisebb jó lesz mindenütt.

4. Legyen n tetszőleges nemnegatív egész. Határozza meg a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot (\ln x)^n$ határértéket!

MO. L'Hospitalt felhasználva, n -re vonatkozó teljes indukcióval belátjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot (\ln x)^n = 0$ minden természetes n -re. Valóban $n = 0$ esetén $x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Másrészt, $n \geq 1$ -re

$$x \cdot (\ln x)^n = \frac{(\ln x)^n}{\frac{1}{x}} \sim \frac{n(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -n x (\ln x)^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \text{ az indukciós hipotézis alapján.}$$

5. Ábrázolja vázlatosan a gyökök, a szakadási helyeken és a végtelenben vett határértékek és a szélsőérték-helyek meghatározása alapján az $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$ függvényt!

MO. Gyök $x = 0$ -ban. Csak $x = 1$ -ben szakad. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$, $f'(x) = \frac{x^2(3-2x)}{(x-1)^2}$, ami az origóban nem vált előjelet, $x = 3/2$ -ben csökkenően vált előjelet, lokális maximuma tehát az $x = 3/2$ -ben van, $f(3/2) = -\frac{27}{4}$.

6. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx = ?$

$$\text{MO. } \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 3x^2 \sqrt{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^1 = \frac{2}{9} \left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{2}{9} (\sqrt{8} - 1).$$

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2000/01 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. (a) Bizonyítsa be vektoralgebrai eszközökkel a koszinusz-tételt!

(b) Igaz-e, hogy $a \neq 0$ esetén $a \cdot b = a \cdot c$ -ből következik $b = c$.

MO. (a) Irányítsuk úgy a háromszög oldalait, hogy a C csúcsban találkozó élek a csúcsból kifele legyenek irányítva. Ekkor: $a - b = c$ vagy $a - b = -c \rightsquigarrow (a - b) \cdot (a - b) = = a^2 - 2a \cdot b + b^2 = c^2 \rightsquigarrow |a|^2 - 2|a||b| \cos \gamma + |b|^2 = |c|^2$.

(b) Nem: csak annyi következik, hogy $a \perp b - c$, pl. $c \perp a \rightsquigarrow a \cdot b = a \cdot (c + b)$.

2. Határozza meg a következő határértékeket! a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n^3}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3}$

MO.

a) ∞ , mert végül $\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n^3} = \left(\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n\right)^{n^2} \geq \left(\sqrt[3]{2}\right)^{n^2} \rightarrow \infty$

hisz persze $\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n \rightarrow \sqrt[3]{e} > \sqrt[3]{2} > 1$

b) 0 , mert végül $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n^3} \rightarrow 0$

3. Legyen $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Mutassa meg, hogy f egyenletesen folytonos a $[0, 1]$, míg g az $[1, \infty)$ intervallumon! Igaz-e, hogy f egyenletesen folytonos a $(0, 1)$ intervallumon?

MO. f $[0, 1]$ -en: Heine és persze $(0, 1)$ -en is mert egyenletes folytonosság a részhalmazokra öröklődik, hisz adott ε -hoz nyilván ott is jó lesz az a δ , amelyek az egész halmazon jó. g $[1, \infty)$ -en: deriváltja

korlátos: $|f'(x)| = \left|-\frac{1}{x^2}\right| \leq 1$ ha $x \geq 1$.

4. Határozza meg a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$ határértéket!

MO. $\sqrt{x} \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \sim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}} = -2\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$,

VAGY: $y \stackrel{\circ}{=} \sqrt{x}$ helyettesítéssel: $\sqrt{x} \ln x = y \ln y^2 = 2y \ln y \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 0$

5. Legyen $f(x) = x^3 \cos \frac{1}{x^2}$ ha $x \neq 0$ és $f(0) = 0$. Létezik-e, és ha igen folytonos-e az f függvény deriváltja az origóban?

MO. Létezik, $f'(0) = 0$, mert $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^3 \cos \frac{1}{x^2}}{x} = x^2 \cos \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ hisz egy korlátos és egy 0-hoz tartó szorzatának 0 a határértéke, de nem folytonos, mert ha $x \neq 0$, akkor $f'(x) = 3x^2 \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}$, aminek persze nincs határértéke az origóban, hiszen az első tagnak, mint egy korlátos és egy 0-hoz tartó szorzatának 0 a határértéke, míg a második tagnak persze nincs határértéke az origóban (pl. Átviteli elvvel $x_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$, $y_n = \frac{1}{\sqrt{(4n+1)\frac{\pi}{2}}}$ esetén $f'(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $f'(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$) és így a kettő összegének sem lehet határértéke itt.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = ?$

MO. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = -\ln |1 + \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$