

2. Zárthelyi megoldásokkal 1994 ősz

1. Igaz-e, hogy

- a) zárt, korlátos intervallumon minden függvény korlátos és felveszi a minimumát és a maximumát,
- b) korlátos intervallumon minden korlátos függvény felveszi a minimumát és a maximumát,
- c) nem korlátos intervallumon minden korlátos folytonos függvény felveszi a minimumát vagy a maximumát ?

MO a) Nem: pl. $f(x) = \frac{1}{x}$ ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$ a $[-1, 1]$ intervallumon nem korlátos és nem veszi fel sem minimumát sem maximumát.

b) Nem: pl. $f(x) = x$ a $(-1, 1)$ intervallumon nem veszi fel sem minimumát sem maximumát.

c) Nem: pl. $f(x) = \sin x \cdot (1 - e^{-x})$ a $[0, \infty)$ -n nem veszi fel sem minimumát sem maximumát.

2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 2x} = ?$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x} = ?$

MO

a) $\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 2x} = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x} \right)^2 = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x} \cdot \frac{2x}{\operatorname{sh} 2x} \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \rightarrow \left(1 \cdot \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$, vagy L'Hospital szabállyal :

$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x} \sim \frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{ch} 2x} x \rightarrow \frac{1}{2}$, tehát $\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 2x} = \left(\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 2x} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{4}$, ha $x \rightarrow 0$,

vagy $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$ -el $\left(\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 2x} \right)^2 = \frac{1}{4\operatorname{ch}^2 x} \rightarrow \frac{1}{4}$, ha $x \rightarrow 0$.

b) $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} = \frac{e^{-x} - e^{-3x}}{1 - e^{-4x}} \rightarrow 0$ ha $x \rightarrow \infty$,

vagy $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$ -el $\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2x} = \frac{1}{2\operatorname{ch} x} \rightarrow 0$ ha $x \rightarrow \infty$ mert $\operatorname{ch} x \rightarrow \infty$ ha $x \rightarrow \infty$.

3. Folytonos-e az $f(x) = e^{-e^{\frac{1}{x}}}$ függvény az $x = 0$ pontban ? Ha nem, milyen típusú szakadása van ?

MO Nem, ugrása van : $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ mert pl. $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{-e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-e^y} = \lim_{z \rightarrow -\infty} e^z = 0$.

4. Legyen $f(x) = x^x$ és $x > 0$. Határozza meg $f'(x)$ értékét !

MO $f(x) = e^{x \cdot \ln x}$, $f'(x) = (\ln x + 1) \cdot e^{x \cdot \ln x} = (\ln x + 1) \cdot x^x$.

5. Hol deriválhatóak az alábbi függvények ? Ahol deriválhatóak, számítsa ki a deriváltakat !

a) $f(x) = x \cdot |x|$

b) $g(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ ha $x \neq 0$, $g(0) = 0$.

MO a) Mindenütt : ha $x > 0$, akkor $f(x) = x^2$, így $f'(x) = 2x$; ha $x < 0$, akkor $f(x) = -x^2$, tehát $f'(x) = -2x$, és ha $x = 0$, akkor $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x |\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0$, tehát $f'(0) = 0$.

b) $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ -n azaz az origótól megfosztott számegegyenesen g deriválható függvényekből épül fel alaplóműveletekkel és összetett függvényképzés segítségével, melyekre a deriválhatóság invariáns, tehát itt g deriválható. De $x = 0$ -ban nem, mert $\frac{g(0 + \Delta x) - g(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}$ és $\sin \frac{1}{\Delta x}$ -nek nem létezik határértéke $x = 0$ -ban, hiszen $x = 0$ minden környezetében felvesz minden -1 és 1 közé eső értéket.

6. Állapítsa meg, hogy létezik-e és ha igen mekkora az $f(x) = x \cdot e^{-x}$ függvény supremuma a $[0, \infty)$ intervallumon !

MO $f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$. Így f' $x < 1$ esetén pozitív és $x > 1$ esetén negatív, tehát a $[0, 1]$ intervallumon f szigorúan monoton növekedő, az $[1, \infty)$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökkenő, így az $x = 1$ pontbeli értéke az intervallumbeli abszolút maximuma, azaz

$$\sup_{x \in [0, \infty)} f(x) = \max_{x \in [0, \infty)} f(x) = f(1) = e^{-1}.$$

7. Igaz-e, hogy

a) ha valamely H halmazon két függvény deriváltjai megegyeznek, akkor itt a két függvény is megegyezik

b) ha f és g két mindenütt deriválható függvények, és $f'(x) < g'(x)$ minden valós x -re, akkor fennáll, hogy $f(x) < g(x)$ minden valós x -re ?

c) ha valamely $[a, b]$ intervallum esetén $f'(x) = 0$ minden $x \in [a, b]$, akkor f konstans ezen az intervallumon ?

MO a) Nem: pl. $H = (0, \infty) \sim \mathbf{N}$ (azaz H az összes pozitív valós a természetes számok kivételével), $f(x) = [x]$ minden $x \in H$ -ra (az egészrész függvény) és $g(x) = 0$ minden $x \in H$ -ra (az azonosan 0 függvény). Ekkor $f'(x) = 0 = g'(x)$ minden $x \in H$ -ra, de persze $f \neq g$ H -n.

b) Nem: pl. $H = (0, \infty)$ $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Ekkor persze $f(x) < 0 < g(x)$ minden $x \in H$ -ra, pedig $g'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 < \frac{1}{x^2} = f'(x)$ minden $x \in H$ -ra.

c) Igen, Lagrange-közéértéktétellel tetszőleges $x_1, x_2 \in [a, b]$ esetén van $c \in (a, b)$, hogy $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)} = f'(c) = 0$, tehát $f(x_1) = f(x_2)$.

8. Készítsen vázlatos ábrát az $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ függvényről a legfontosabb jellemző értékek feltüntetésével !

2. Zárthelyi megoldásokkal 1995 ősz

1. Létezik-e az alábbi függvénynek jobb- ill. baloldali határértéke az $x = 0$ -ban, és ha igen mi az értéke?

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \sin \frac{1}{x}$$

MO Igen, a jobboldali határérték 0, mert $|f(x)| \leq e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0$. Baloldali határérték nem létezik, mert $e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow \infty$ és $\sin \frac{1}{x}$ felvesz minden -1 és 1 közé eső értéket az $x = 0$ minden környezetében, így $f(x)$ felvesz minden valós értéket az $x = 0$ minden környezetében.

2. Legyen $f(x) = \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}}{5\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$.

Számítsa ki a következő határértékeket! a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

MO. $f(x) = \frac{\sqrt[15]{x^3} + \sqrt[15]{x^5}}{5\sqrt[15]{x^5} + \sqrt[15]{x^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^{-2}} + 1}{5 + \sqrt[5]{x^{-2}}} = \frac{\sqrt[5]{x^2} + 1}{5\sqrt[5]{x^2} + 1}$, így $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{5}$.

3. Legyenek $a < b$ valós számok tetszőlegesen. Igaz-e, hogy

- minden $[a, b]$ -n értelmezett f függvény felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket;
- minden $[a, b]$ -n folytonos függvény felvesz minden két függvényértéke közötti értéket;
- minden (a, b) -n folytonos függvény felvesz minden két függvényértéke közötti értéket;
- ha egy $[a, b]$ -n értelmezett f függvény felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket, akkor f folytonos $[a, b]$ -n?

MO a) nem: egészrész függvény $[0, 2]$ -n. b), c) igaz: Bolzano-tétel következménye. d) nem: törtrész függvény $[0, \frac{3}{2}]$ -n.

4. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ függvény a $(0, 1)$ intervallumon?

MO

Igen: legyen $g(x) = f(x)$ ha $x \neq 0$ és $g(0) = 0$. Ekkor g folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, így itt egyenletesen folytonos, tehát egyenletesen folytonos ennek bármely részén, így $(0, 1)$ -en is, ahol viszont $g = f$, tehát f is egyenletesen folytonos $(0, 1)$ -en.

5. Legyen c tetszőleges pozitív valós.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^c \cdot \ln x = ?$$

MO

$$x^c \cdot \ln x = \frac{\ln x}{x^{-c}} \sim \frac{\frac{1}{x}}{-cx^{-c-1}} = -\frac{1}{c}x^c \rightarrow 0 \quad \text{ha } x \rightarrow 0^+$$

6. Bizonyítsa be, hogy minden $x > 0$ esetén $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$!

MO

$[f(a) = g(a) \wedge (\forall x > a)(f'(a) < g'(a))] \rightsquigarrow (\forall x > a)(f(a) < g(a))$, így $x > 0 \rightsquigarrow \sin x < x \rightsquigarrow -x < -\sin x \rightsquigarrow$

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x \rightsquigarrow x - \frac{x^3}{6} < \sin x.$$

7. Hány megoldása van az alábbi egyenletnek? Ha van(nak) megoldás(ok), állapítsa meg előjelét(üket)!

$$x^4 - 108x + 9 = 0$$

MO $f(x) = x^4 - 108x + 9 \rightsquigarrow f'(x) = 4x^3 - 108$, $f'(x) = 0$ iff $x = 3$. Mivel $f'(x) < 0$ ha $x < 3$ és $f'(x) > 0$ ha $x > 3$, így $x = 3$ az egyetlen szélsőérték hely. Továbbá $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, és $f(3) = 81 - 324 + 9 = -234$. Következésképp f -nek van két gyöke, melyek mindegyike $f(0) = 9 > 0$ miatt pozitív.

8. Van-e olyan a $(-1, 1)$ intervallumon deriválható h függvény, hogy h deriváltja $(-1, 1)$ -en az f vagy a g függvény, ha

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \arctg \frac{1}{x} \quad \text{ha } x \neq 0 \quad \text{és} \quad f(0) = g(0) = 0.$$

MO Nincs. Darboux tétel miatt a deriváltak felveszik minden két értékük közötti összes értéket. De $f(x)$ pl. $[0, 1]$ -en nem vesz fel egyetlen $f(0) = 0$ és $f(1) = 1$ közötti értéket sem, $(0, 1)$ -en f értékei mind nagyobbak 1-nél. Hasonló a helyzet g -vel, melynek $x = 0$ -ban ugrása van: $[0, 1]$ -en nem vesz fel egyetlen $f(0) = 0$ és $f(1) = \frac{\pi}{4}$ közötti értéket sem.

2. Zárthelyi megoldásokkal

1997 ősz I. évf. 13.-18.tk.

1. a) Bizonyítsa be, hogy az $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ függvénynek nem létezik határértéke az origóban!
b) Milyen típusú szakadása van az $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ függvénynek az origóban? Válaszát indokolja!
MO a) Átviteli elvvel, mert ha $x_n = \frac{1}{n\pi}$ és $y_n = \frac{1}{(4n+1)\pi}$, akkor $f(x_n) \rightarrow 0 \neq 1 \leftarrow f(y_n)$.
b) Megszüntethető, mert $0 \leq |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| \rightarrow 0$ ha $x \rightarrow 0$, tehát csendőrelvvel $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

2. Bizonyítsa be, hogy minden pozitív x esetén $1 + x < e^x$.

MO Legyen $f(x) = 1 + x$ és $g(x) = e^x$. Ekkor $f(0) = 1 = g(0)$ és $f'(x) = 1 < e^x = g'(x)$ ha $x > 0$.

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = ?$$

MO L'Hospital-al $x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} \sim \frac{2x}{e^x} \sim \frac{2}{e^x} \rightarrow 0$.

4. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = e^{-x}$ függvény az $[0, \infty)$ intervallumon? Állítását indokolja!

MO Igen, mert deriváltja, a $-e^{-x}$ korlátos itt, hiszen $|-e^{-x}| = e^{-x}$ monoton csökken és $e^0 = 1$, tehát $|-e^{-x}| \leq 1$.

5. Legyen $f(x) = x^x$ és $x > 0$. $f'(x) = ?$

MO $f(x) = e^{x \cdot \ln x}$, $f'(x) = (\ln x + 1) \cdot e^{x \cdot \ln x} = (\ln x + 1) \cdot x^x$.

6. Deriválhatóak-e az alábbi függvények az origóban? Ha igen, számítsa ki a deriváltat, ha nem, magyarázza meg, miért!

$$\text{a) } f(x) = x \cdot |x| \quad \text{b) } g(x) = x + |x|$$

MO a) f deriválható, mert $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x |\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0$, tehát $f'(0) = 0$. b) g nem deriválható, mert egy az origóban deriválható és egy itt nem deriválható összege. Valóban, feltéve indirekte, hogy g deriválható itt, $g(x) = x + |x|$ -ből $|x| = g(x) - x$ két itt deriválható különbsége és mint ilyen deriválható itt.

7. Legyen $H \subseteq \mathbf{R}$ tetszőleges nyílt halmaz és tegyük fel, hogy f deriválható H -n. Igaz-e, hogy

a) Ha van olyan $c \in \mathbf{R}$, hogy $f(x) = c$ minden $x \in H$ esetén, akkor $f'(x) = 0$ minden $x \in H$ esetén?

b) Ha $f'(x) = 0$ minden $x \in H$ esetén, akkor van olyan $c \in \mathbf{R}$, hogy $f(x) = c$ minden $x \in H$ esetén?

MO a) Igen, konstans deriváltja 0, mert ha $f(x) = c$, akkor $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$, tehát $f'(0) = 0$.

b) Nem, a)-beli gondolatmenet megismételhető az f egészrész függvényre értelmezési tartományának, $H = \text{Do } f$ -nek bármely belső pontjában, így ott deriváltja 0 és persze f nem konstans H -n.

8. Invertálható-e az $f(x) = xe^x$ függvény értelmezési tartományán? Ha nem, adjon meg egy olyan legbővebb intervallumot, ahol invertálható!

MO Nem, mert $f'(x) = (x+1)e^x = 0 \rightsquigarrow x = -1$ és $f'(x) > 0$, ha $x > -1$, $f'(x) < 0$, ha $x < -1$, tehát lokális minimuma van $x = -1$ -ben, $I_1 = [-1, \infty)$ -n f szigorúan monoton növekvő és $I_2 = (-\infty, -1]$ -en f szigorúan monoton csökkenő. a) Szigorú monotonitásból közvetlenül következik a kölcsönös egyértelműség, tehát f I_1 -en és I_2 -n invertálható. b) Felhasználva, hogy intervallumon folytonos függvény esetén a szigorú monotonitás szükséges feltétele is az invertálhatóságnak, az adódik, hogy sem az I_1 -nél sem az I_2 -nél bővebb intervallumokon f már nem inverálható, speciálisan értelmezési tartományán (az egész \mathbf{R} -en) sem. (Ez egyébként a folytonos függvények invertálhatóságára vonatkozó fenti feltétel helyett a Bolzano tételre való hivatkozással is belátható az alábbi módon. Legyen $I'_1 = (-1, 0) \subseteq I_1$ és $y_0 = f(-1)$. Mivel egyrészt $f^* I'_1 \cup f^* I_2 \subseteq (y_0, 0)$, másrészt $(f(0) = 0$ illetve $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ miatt) Bolzano tétellel $(y_0, 0) \subseteq f^* I'_1$ és $(y_0, 0) \subseteq f^* I_2$, azt kapjuk, hogy $f^* I'_1 = (y_0, 0) = f^* I_2$, tehát f minden $(y_0, 0)$ -beli értéket felvesz mind $I'_1 \subseteq I_1$ -en mind I_2 -n. Következésképp f egyetlen I_1 -nél ill. I_2 -nél bővebb intervallumon sem kölcsönösen egyértelmű, így nem invertálható.)

2. Zárthelyi MEGOLDÁSOKKAL

1998 ősz I.évf. 13.-18.tk.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg \frac{1}{x} \sin x = 0$?

MO. $0 \leq |\arctg \frac{1}{x} \sin x| = |\arctg \frac{1}{x}| \cdot |\sin x| \leq |\arctg \frac{1}{x}| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \arctg 0 = 0$

2. Rajzoljuk fel vázlatosan az alábbi függvényt a végtelenekben és a nem folytonossági helyeken vett (jobb- ill. baloldali) határértékek meghatározása alapján!

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{1 - e^{1-x}}$$

MO. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 +$ (számláló 1-nél nagyobb, mert a kitevő pozitív, nevező 1-nél kisebb),

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm} f(x) = \pm \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ (nevező negatív)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -0 \text{ (nevező negatív)},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -0 \text{ (számláló pozitív, nevező negatív)}.$$

Másutt folytonos és nincs gyökhelye.

3. Legyenek $a < b$ valós számok tetszőlegesen. Igaz-e, hogy

a) minden $[a, b]$ -n értelmezett függvény korlátos

b) minden $[a, b]$ -n folytonos függvény korlátos

c) minden (a, b) -n folytonos függvény korlátos

d) ha egy $[a, b]$ -értelmezett függvény korlátos, akkor folytonos is itt.

Válaszait indokolja !

MO. a) Nem: $f(x) = \frac{1}{x}$ ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$, $I = [0, 1]$ b) Igaz: Weierstrass-tétel,

c) Nem: $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (0, 1)$ d) Nem: $f(x) = \text{sign } x$, $I = [-1, 1]$.

4. Hol deriválható az alábbi függvény?

$$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}, \text{ ha } x \neq 0, f(0) = 0$$

Ahol deriválható, ott adja meg deriváltat!

MO. Az origó kivételével mindenütt, mert itt elemi függvény, az origóban nem, mert nem létezik a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}.$$

5. Van-e gyökhelye az alábbi függvénynek, és ha van, akkor hány ?

$$f(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$$

MO. Pontosan egy van, mert páratlan fokszámú polinomnak van gyökhelye és

$$f'(x) = 7x^6 + 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0 \text{ minden valós } x\text{-re,}$$

így az egész számegeyenesen szigorúan monoton növekedő.

6. Létezik-e olyan, a valós számok valamely H részhalmazán deriválható, ott szigorúan pozitív deriválttal rendelkező függvény, mely H -n nem szigorúan monoton növekedő? Ha igen adjon meg egy ilyen, ha nem indokolja meg, hogy miért.

MO. Igen, pl. a törtrész függvény, ha $H = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, azaz az egészekről megfosztott számegeyenes.

2. Zárthelyi MEGOLDÁSOKKAL

1999 őszi I.évf. 13.-18.tk.

1. Léteznek-e az alábbi határértékek, és ha igen, mi az értékük?

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

MO.

a) Nem, átviteli elvvel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

mert $\sin x$ folytonos az $x=0$ -ban. c) $0 \leq \left| \frac{1}{x} \sin x \right| = \left| \frac{1}{x} \right| \cdot |\sin x| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x = 1$

2. Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, melynek nemfolytonossági helyei egy pontban torlódnak, azaz valamely csupa különböző elemből álló (a_n) konvergens sorozat esetén fennáll, hogy a függvény az $x = a_n$, $n = 1, 2, \dots$ pontokban nem folytonos, mindenütt másutt folytonos? Van-e olyan fenti tulajdonságú függvény, melynek nemfolytonossági helyein a határértéke végtelen?

MO. Van, pl. ha f definíciója a következő: $f(x) = 1$ ha $x = \frac{1}{n}$ és $f(x) = 0$ egyébként, akkor

$a_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Van: ha f definíciója a következő: $f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{x}}$ ha $x \neq \frac{1}{n\pi}$ és $f(x) = 0$ egyébként,

akkor $a_n = \frac{1}{n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ és $\lim_{x \rightarrow n\pi} f(x) = \infty$.

3. Legyenek $a < b$ valós számok tetszőlegesen. Igaz-e, hogy

a) minden $[a, b]$ -n értelmezett korlátos függvény felveszi valamelyik szélsőértékét

b) minden $[a, b]$ -n folytonos függvény felveszi mindkét szélsőértékét

c) minden $[a, \infty)$ -n folytonos korlátos függvény felveszi valamelyik szélsőértékét

d) ha egy $[a, b]$ -értelmezett függvény felveszi mindkét szélsőértékét, akkor folytonos is itt.

MO. a) Nem: $f(x) = x$ ha $-1 < x < 1$, $f(-1) = f(1) = 0$, $I = [-1, 1]$ b) Igaz: Weierstrass-tétel, c)

Nem: $f(x) = \sin x \cdot (1 - e^{-x})$, $I = [0, \infty)$ d) Nem: $f(x) = \operatorname{sign} x$, $I = [-1, 1]$.

4. Legyen $f(x) = x^2 \ln x$ ha $x > 0$ és $f(0) = 0$. Folytonos ill. deriválható-e jobbról f az origóban? Ha létezik, folytonos ill. deriválható-e itt jobbról a jobboldali deriváltja?

MO. Folytonos: $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \ln x = 0 = f(0)$, deriválható: $f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0+} h \ln h = 0$, továbbá a derivált jobbról folytonos: ha $x > 0$, akkor $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} =$
 $= 2x \ln x + x \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 0 = f'_+(0)$. Végül a derivált már nem deriválható jobbról: $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f'(0+h) - f'_+(0)}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h \ln h + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} 2 \ln h + 1 = -\infty$.

5. Bizonyítsa be, hogy minden $x \geq 0$ esetén $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

MO. $\cos 0 = 0 = 1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}$, $(\cos x)' = -\sin x \geq -x = (1 - \frac{x^2}{2})'$ ha $x \geq 0$, mert $\sin x \leq x$ ha $x \geq 0$ hisz $\sin 0 = 0$ és $(\sin x)' = \cos x \leq 1 = (x)'$.

6. Van-e lokális szélsőérték helye, és ha igen hol, a következő függvénynek?

$f(x) = 2x^9 + 4x^5 + 6x^3 + 8x + 10$

MO. Nincs: mindenütt deriválható és $f'(x) = 18x^8 + 20x^4 + 18x^2 + 8 > 8 > 0$ minden x -re.