1. Zárthelyi megoldásokkal
1998 tavasz I.évf. 13.-18.tk.

1. Határozza meg az $y' = xy^2$ differenciálegyenlet általános megoldását és azt a megoldást, mely kielégíti az $y(0) = -2$ kezdeti érték feltételt! Ellenőrizze a kapott eredményt!
MO. Szeparábilis differenciálegyenlet: $\frac{y'}{y^2} = x \rightsquigarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + 2c \rightsquigarrow y = -\frac{2}{x^2+2c}$, $-2 = -\frac{2}{0+2c}$ $\rightsquigarrow c = 1/2$. Valóban, ekkor $y' = 4\frac{x}{(x^2+1)^2} = xy^2$ és $y(0) = -2$.

2. Konvergensek–e az alábbi improprius integrálok? Válaszát indokolja!

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx \qquad \text{b)} \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

MO. a) $\sin x \sim x$ és $\nexists \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \rightsquigarrow \nexists \int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx$, b) $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ és $\exists \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \rightsquigarrow \exists \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$

3. Konvergensek–e az alábbi numerikus sorok? Válaszát indokolja!

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

MO. $(1 - \frac{1}{n})^n \longrightarrow \frac{1}{e}$ és $0 \ne \frac{1}{e} < 1$ így a) nem konvergens, b) gyökkritériummal konvergens.

4. Hol konvergens és hol egyenletesen konvergens az $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ függvénysorozat?
MO. Ha $x > 0$, akkor $\lim f_n(x) = 0$ és ha $x = 0$, akkor persze $\lim f_n(x) = 1$, negatív x–ekre meg nyilván divergens, tehát a konvergenciatartomány: $K = [0, \infty)$. Egyenletesen konvergens minden $\delta > 0$ esetén a $[\delta, \infty)$ intervallumon, mert itt $|r_n(x)| = |f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \le \frac{1}{n^\delta} \longrightarrow 0$, de nem egyenletesen konvergens az egész $(0, \infty)$ intervallumon, mert pl. ha $x_n = \frac{1}{n}$, akkor $r_n(x_n) = f_n(x_n) = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1 \ne 0$.

5. Hol folytonosak az alábbi függvények? Válaszát indokolja!

$$\text{a)} \quad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \text{ ha } (x,y) \ne 0,\ f(0,0) = 0 \qquad \text{b)} \quad g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4} \text{ ha } (x,y) \ne 0,\ g(0,0) = 0$$

MO. Az origón kívül mindkettő mindenütt folytonos, mert itt folytonosakból van folytonosságmegőrző módon összerakva, míg f az origóban is folytonos: $|f(x,y)| = \left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}\right| \le \dfrac{x^2y^2}{x^2} = y^2 \xrightarrow[y \longrightarrow 0]{} 0$, g viszont nem: $g(0,y) = \dfrac{y^2}{y^4} \xrightarrow[y \longrightarrow 0]{} \infty$.

1. Zárthelyi megoldásokkal

1999 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek–e az alábbi improprius integrálok? Válaszát indokolja!

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$

MO. a) $y = 1-x$ helyettesítéssel $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx = -\int_1^0 \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,dy$, ami létezik mert $\frac{1}{3} < 1$.

b) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, tehát $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$ létezik, mert $\frac{3}{2} > 1$.

---

2. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok ? Válaszát indokolja !

a) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n!}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{2^n}{n!}$

MO. a) Nem: $\displaystyle\frac{n!}{n^2} \longrightarrow \infty \neq 0$. b) Igen: e^x Taylor–sora alapján $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{2^n}{n!} = e^2$

VAGY hányadoskritériummal: $\displaystyle\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0 < 1.$

---

3. Hol konvergens és hol egyenletesen konvergens az $f_n(x) = e^{-nx}$ függvénysorozat ?

MO. A határfüggvény: $f(x) = 0$ ha $x \in (0,\infty), f(0) = 1$. $f_n(x)$ egyetlen negatív x–re sem konvergens. Egyenletesen konvergens minden $\delta > 0$ esetén a $[\delta,\infty)$ intervallumon mert e^{-nx} monoton csökkenő, így $|r_n(x)| = |f_n(x)| = e^{-nx} \leq e^{-n\delta} \longrightarrow 0$ ha $x > \delta > 0$. Nem egyenletesen konvergens már a $(0,\infty)$ intervallumon sem, mert $r_n(\frac{1}{n}) = f_n(\frac{1}{n}) = e^{-n\cdot\frac{1}{n}} = e^{-1} \not\longrightarrow 0$.

---

4. Számítsa ki az $f(x) = \sin x^2$ függvény századik deriváltját az origóban, amennyiben az létezik!

MO. $\sin x$ Taylor-sorából: $\displaystyle\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} \mp \ldots - \frac{x^{100}}{50!} \pm \ldots$, vagyis $\displaystyle\frac{f^{(100)}(0)}{100!}x^{100} = -\frac{x^{100}}{50!}$, tehát $\displaystyle f^{(100)}(0) = -\frac{100!}{50!}$.

---

5. Hol folytonosak az alábbi függvények ? Válaszát indokolja !

a) $\displaystyle f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$. b) $\displaystyle f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$.

MO. Mindkettő az origó kivételével mindenütt, mert a koordináta–függvények folytonosak és ezekből alapműveletekkel vannak összerakva, melyek megőrzik a folytonosságot. Továbbá

a) nem folytonos az origóban, mert $f(0,y) = -1 \xrightarrow[y\longrightarrow 0]{} -1 \neq 1$ pedig $f(x,0) = 1 \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 1$.

b) folytonos az origóban is, mert $|f(x,y)| \leq y^2 \longrightarrow 0$ ha $(x,y) \longrightarrow (0,0)$.

---

6. Határozzuk meg az alábbi függvény parciális deriváltjait az origóban, amennyiben léteznek!

$\displaystyle f(x,y) = \frac{xe^{2x}}{x+y}$ ha $x \neq y$, $f(0,0) = 1$.

MO. a) $f(x,0) = e^{2x}$ *tetszőleges* x–re, így $f_x(x,0) = 2e^{2x}$, azaz $f_x(0,0) = 2e^0 = 2$.

b) $f(0,y) = 0$ tetsz. $y \neq 0$–ra, de $f(0,0) = 1$, így $f(0,y)$ nem folytonos az $y = 0$–ban, következésképpen nem is deriválható itt, azaz nem létezik az $f_y(0,y)$.

---

1. Zárthelyi megoldásokkal

2000 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek–e az alábbi impropius integrálok?

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^3}\,dx$

MO. a) Igen: $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \underset{x=0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ és $\exists \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ b) Nem: $\displaystyle\frac{\sin x^2}{x^3} \underset{x=0}{\sim} \frac{1}{x}$ és $\nexists \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

---

2. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok ?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

MO. a) Nem. $a_n \not\longrightarrow 0$: $a_n^n = \displaystyle\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow 1/e \leadsto a_n^n \geq 1/3$ nagy n–ekre $\leadsto a_n \geq \sqrt[n]{1/3} \longrightarrow 1$

b) Igen. Gyökkritériummal: $\sqrt[n]{a_n} = \displaystyle\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 1/e < 1$

---

3. Konvergens ill. abszolút konvergens–e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\ln n}{n}$ sor ?

MO. Leibniz–kritériummal konvergens: $a_n \mathrel{\mathring{=}} \displaystyle\frac{\ln n}{n} \leadsto a_n \searrow 0$ nagy n–ekre , hiszen $\ln x \lhd x$ és $\displaystyle\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2} \leq 0$ ha $x \geq e$. Minoráns kritériummal nem abszolút konvergens: $a_n \geq 1/n$ (ha $n \geq 3$) .

---

4. Konvergens–e a következő numerikus sor ? $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{4}\pm\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\pm\ldots$

MO. Divergens mert egy bezárójelezése az: $\nexists \displaystyle\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right)$ hisz $\displaystyle\frac{n-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

---

5. Létezik–e a $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$

MO. Igen. Polárhelyettesítéssel: $\displaystyle\frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+r)}{r} \xrightarrow[r\to 0]{} 1$

---

6. Hol folytonosak az alábbi függvények ?

a) $f(x,y) = \displaystyle\frac{xy}{x^2+y^4}$ az origón kívül, $f(0,0)=0$. b) $f(x,y) = \displaystyle\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ az origón kívül, $f(0,0)=0$.

MO. Mindkettő az origó kivételével mindenütt, mert a koordináta–függvények folytonosak és ezekből alapműveletekkel vannak összerakva, melyek megőrzik a folytonosságot. Továbbá

a) nem folytonos az origóban, mert $f(x,x) = \displaystyle\frac{x^2}{x^2+x^4} = \frac{1}{1+x^2} \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 1 \neq 0 \xleftarrow[0\longleftarrow x]{} 0 = \frac{0}{x^2+0} = f(x,0)$

b) folytonos az origóban is, mert $|f(x,y)| \leq \displaystyle\frac{x^2y^2}{x^2} = y^2 \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(0,0)]{} 0.$

---

1. Zárthelyi megoldásokkal

2001 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek–e az alábbi improprius integrálok? a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{1}{x^3}}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x^3}{x^3}\,dx$

MO. a) Nem: $\displaystyle \sin\frac{1}{x^3} \sim_\infty \frac{1}{x^3} \rightsquigarrow \sqrt{\sin\frac{1}{x^3}} \sim_\infty \frac{1}{x^{3/2}} \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{1}{x^3}}} \sim_\infty x^{3/2}$ és $\displaystyle\nexists \int_1^\infty x^{3/2}\,dx$

VAGY: $\displaystyle \sin\frac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to\infty]{} +0 \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{1}{x^3}}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty \rightsquigarrow \nexists \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{1}{x^3}}}\,dx$

b) Nem: $\displaystyle \frac{\cos x^3}{x^3} \sim_{x=0} \frac{1}{x^3}$ és $\displaystyle\nexists \int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$

---

2. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok ? a) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

MO. a) Nem. $a_n \not\to 0$: $\displaystyle b_n \stackrel{\circ}{=} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \rightsquigarrow b_n^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow 1/e \rightsquigarrow b_n^n \geq 1/3$ nagy n–ekre

$\rightsquigarrow b_n \geq \sqrt[n]{1/3} \longrightarrow 1 \rightsquigarrow a_n = n\cdot b_n \longrightarrow \infty$

b) Igen. Gyökkritériummal: $\displaystyle \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 1\cdot 1/e < 1$

---

3. Konvergensek–e a következő numerikus sorok? (a) $\displaystyle \frac{1}{\sqrt2}-\frac12+\frac{1}{\sqrt3}-\frac13+\frac{1}{\sqrt4}-\frac14+\frac{1}{\sqrt5}-\frac15\pm\ldots$

(b) $\displaystyle 1+\frac{1}{\sqrt2}-\frac12-\frac{1}{\sqrt3}+\frac13+\frac{1}{\sqrt4}-\frac14-\frac{1}{\sqrt5}+\ldots$

MO. (a) Divergens mert egy bezárójelezése az: $\displaystyle\nexists\sum_1^\infty\left(\frac{1}{\sqrt n}-\frac1n\right)$ hisz $\displaystyle\frac{1}{\sqrt n}-\frac1n=\frac{n-\sqrt n}{\sqrt n\cdot n}\sim\frac{1}{\sqrt n}$.

(b) Konvergens mert két, a Leibnitz–kritérium feltételeit kielégítő, és ezért konvergens sor,

a $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n+1}\frac1n$ és a $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty(-1)^n\frac{1}{\sqrt n}$ összefésülése.

---

4. Határozza meg az $\displaystyle f_n(x)=\frac{x2^{nx}+nx^4}{2^{nx}+nx^2}$ függvénysorozat határfüggvényét, ahol az létezik!

MO. $f(x)=x$ ha $x<0$, $f(x)=x^2$ ha $x\geq0$, mert

$\displaystyle x\leq 0 \rightsquigarrow f_n(x)=\frac{\frac{2^{nx}}{n}x+x^4}{\frac{2^{nx}}{n}+x^2}\longrightarrow x^2$ hiszen $(2^{nx}=(2^x)^n$ miatt $)$ $x\leq0\rightsquigarrow 2^x\leq1\rightsquigarrow \displaystyle\frac{2^{nx}}{n}\longrightarrow 0$

$\displaystyle x>0 \rightsquigarrow f_n(x)=\frac{x+\frac{n}{2^{nx}}x^4}{1+\frac{n}{2^{nx}}x^4}\longrightarrow x$ hiszen $(2^{nx}=(2^x)^n$ miatt $)$ $x>0\rightsquigarrow 2^x>1\rightsquigarrow \displaystyle\frac{n}{2^{nx}}\longrightarrow 0$

---

5. Léteznek–e a követekező határértékek? (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

MO. Igen: (a) $\displaystyle\frac{x^4-y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}(x^2-y^2)\xrightarrow[(x,y)\to0]{}0$

(b) $\displaystyle\left|\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to0]{}0$

---

6. Döntse el, hogy folytonossá tehető–e az origóban az $\displaystyle f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ függvény!

MO. Nem: $\displaystyle f(x,\sqrt x)=\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac12\xrightarrow[x\longrightarrow0+]{}\frac12\neq0$, pedig $\displaystyle f(x,0)=\frac{0}{x^2+0}=0\xrightarrow[x\longrightarrow0+]{}0$

---

1. Zárthelyi megoldásokkal

2002 tavasz B2 (SGy)

1. Konvergensek–e az alábbi improprius integrálok?

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\arcsin\sqrt{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\,dx$

MO. Mind konvergens, u. is:

$$x=0\text{–ban}\quad \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \frac{1}{\arcsin\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \sim \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{és} \quad \exists \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

---

2. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok ? a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln n}}}$

MO. a) Igen: $\exists \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+p}}$ ha $p>0$. b) Nem: $\displaystyle\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n}$.

c) Nem: $\ln a_n = -(1+\dfrac{1}{\ln n})\ln n = 1-\ln n \rightsquigarrow a_n = e^{\ln a_n} = e\cdot \dfrac{1}{e^{\ln n}} = e\cdot\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$.

---

3. Konvergensek–e a következő numerikus sorok? (a) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{5}+\dots$

(b) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{5}+\dots$

MO. (a) Divergens mert egy konvergens ($\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$) és egy divergens ($\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$) összefésülése.

(b) Konvergens mert két, a Leibnitz–kritérium feltételeit kielégítő, és ezért konvergens sor, a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ és a $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$ összefésülése.

---

4. Hol konvergens és hol egyenletesen konvergens az $f_n(x)=e^{\frac{1}{xn}}$ függvénysorozat ?

MO. A határfüggvény: $f(x)=1$ minden valós $x\neq 0$–ra. Egyenletesen konvergens minden $\delta>0$ esetén az $\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)$ halmazon és nem egyenletesen konvergens egyetlen origót tartalmazó torlódási pontú intervallumon sem. Ugyanis, egyrészt $f_n(1/n)=e\neq 1$ és $f_n(-1/n)=1/e\neq 1$ miatt $r_n(1/n), r_n(-1/n)\not\to 0$, másrészt ha $x\geq\delta>0$, akkor $|r_n(x)| = e^{\frac{1}{xn}}-1 \leq e^{\frac{1}{\delta n}}-1 \longrightarrow 0$ ha pedig $x\leq-\delta$, akkor $|r_n(x)| = 1-e^{\frac{1}{xn}}\leq 1-e^{\frac{1}{-\delta n}} \longrightarrow 0$.

Tehát a maradék mindkét félegyenesen majorálható egy 0–hoz konvergáló numerikus sorozattal, ezért a függvénysorozat mindkét félegyenesen, így azok unióján is tényleg egyenletesen konvergens, viszont mindkét oldalról vannak az orgóhoz konvergáló olyan sorozatok, melyek mentén a maradék nem tart 0–hoz, így az origó torlódási pontú intervallumokon valóban nem egyenletesen konvergens.

---

5. Mutassa meg, hogy az $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ függvény korlátos az értelmezési tartományán!
(Vizsgálja f–et, mint y/x függvényét!)

MO. Valóban, $x\neq 0$–ra $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}=\dfrac{\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^4}{x^4}}=\dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}$ így, ha bevezetjük a $z\stackrel{\circ}{=}\dfrac{y}{x}$ jelölést, akkor f értékészlete megegyezik a $g(z)=\dfrac{z^2}{1+z^4}$ függvény értékkészletével (ha abba beleértjük a végtelenekben vett határtékeket is). $g-$nek pedig abszolút maximuma van a $z=\pm1$ helyeken, a végtelenekben vett határértékei pedig 0–ák.

---

6. Léteznek–e a következő határértékek? (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^4+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

MO. (a) Igen: $\left|\dfrac{xy^2}{x^4+y^2}\right|\leq\left|\dfrac{xy^2}{y^2}\right|=|x|\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0$ (b) Nem: Ha $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, akkor egyrészt $f(x,0)=0\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0$, másrészt $f(x,x^2)=\dfrac{x^4}{2x^4}=\dfrac{1}{2}\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}\dfrac{1}{2}\neq 0$.