2. Zárthelyi megoldásokkal

1998 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

1. Döntse el, hogy létezik–e, és ha igen, számítsa ki az $f(x) = e^{-x^2}$ függvény századik deriváltját az $x = 0$ helyen!

MO. Egyrészt e^x origó körüli Taylor-sora alapján : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$, tehát f origó körüli hatványsorba fejthető, következésképpen itt akárhányszor deriválható és ez az f–et előállító hatványsor f origó körüli Taylor-sora, így a Taylor-sor definíciója szerint minden valós x–re $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

A két kifejezésben x^{100} együtthatóit összehasonlítva $\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = (-1)^{50} \frac{1}{50!}$, amiből

$$f^{(100)}(0) = (-1)^{50} \frac{100!}{50!} = \frac{100!}{50!} .$$

2. Mely **a** és **b** valós számokra lesz az alábbi egyenletrendszernek a) nulla b) egy c) végtelen sok megoldása ?

$$\begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ x + 2y + z &= -2 \\ 3x + \mathbf{a}z &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

MO. Gauss–elimináció után a kibővített mátrix: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & a+1 & b \end{pmatrix}$, tehát

0 mo.: $a = -1,\ b \neq 0$, egy mo.: $a \neq -1$, ∞ sok mo.: $a = -1,\ b = 0$.

3. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{a} \end{pmatrix}$.

Mely **a** valós számok esetén invertálható az $\underline{\underline{A}}$ mátrix? Határozza meg $\underline{\underline{A}}$ inverzét az $\mathbf{a} = 0$ esetben!

MO. Minden $a \neq 1$ esetén, $\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Hol deriválható az $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ függvény?

MO. Az origón kívül és az $y = -x$ egyenesen mindenütt, mert ilyenekből van deriválhatóságot megőrző módon összerakva. Az origóban azonban nem. Ugyanis $f(x, 0) = \sqrt[3]{x^3} = x$ így $f_x(0, 0) = 1$ és ugyanígy a másik, tehát $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 1$, továbbá $\frac{f(x, y) - f(0, 0) - (1, 1) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ és ennek a függvénynek nincs határértéke az origóban, hisz a tengelyek mentén konstans 0 az értéke, az $y = x, x > 0$ egyenes mentén pedig konstans $\frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0$. Ami az $y = -x$ egyenest illeti, ennek mentén már a parciálisok sem léteznek : $\frac{f(a + x, -a) - f(a, a)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 3ax^2 + 3a^2x}}{x} = \sqrt[3]{1 + \frac{3a}{x} + \frac{3a^2}{x^2}}$, aminek nyilvánvalóan nincs határértéke az $x = 0-$ban.

5. Határozza meg az $f(x, y) = 3x^3 + 2xy$ függvény $P = (-1, 3)$ pontbeli $v = (1, 2)$ irányú iránymenti deriváltját a $P = (-1, 3)$ pontban!

MO. grad $f = (9x^2 + 2y, 2x)$, tehát grad $f|_P = (15, -2)$, és $|v| = \sqrt{5}$, így $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{5}} (15, -2) \cdot (1, 2) = \frac{11}{\sqrt{5}}$

2. zárthelyi megoldásokkal

1999 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

(Minden választ indokolni kell)

1. Legyenek $L_1, L_2 \subseteq L$ lineáris terek. Állapítsa meg, hogy L alábbi részhalmazai közül melyik altere L–nek $(X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\})$.

a) $(L \setminus L_1) \cup \{0\}$ b) $L_1 \cap L_2$

MO. a) Nem, pl. $L = \mathbf{R}^2$, $L_1 = \mathbf{R} \times \{0\}$ (valós tengely) esetén $(1,1)$, $(1,-1) \in (L \sim L_1) \cup \{0\}$, de $(2,0) = (1,1) + (1,-1) \notin (L \sim L_1) \cup \{0\}$. b) Igen: $c, d \in \mathbf{R}, x, y \in L_1 \cap L_2 \ \rightsquigarrow\ x, y \in L_1, L_2 \ \rightsquigarrow\ cx + dy \in L_1, L_2 \ \rightsquigarrow\ cx + dy \in L_1 \cap L_2$.

---

2. Melyek igazak, melyek nem?

a. Lineárisan függetlenségen egy elem elhagyása nem változtat

b. Lineárisan függőségen egy elem elhagyása nem változtat

c. Lineárisan függetlenségen egy elem hozzávétele nem változtat

d. Lineárisan függőségen egy elem hozzávétele nem változtat

MO. a) Igaz: $\sum_{i \neq j} c_i x_i = 0 \ \rightsquigarrow\ \sum_i c_i x_i = 0$ ha $c_j = 0 \ \rightsquigarrow\ c_i = 0$ minden $i \neq j$. b) Nem igaz: $x \neq 0$-val $\{x, 2x\}$ lin függő, de $\{x\}$ nem. c) Nem igaz, lásd b)-beli pl. d) Igaz a) miatt.

---

3. Mely **a** és **b** valós számokra lesz az alábbi egyenletrendszernek a) nulla b) egy c) végtelen sok megoldása?

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ -x - 2y + \mathbf{a}z &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

MO. Gauss–elimináció után:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}-2 & \mathbf{b}-1 \end{pmatrix}$$

tehát a) 0 mo.: $\mathbf{a} = 2$, $\mathbf{b} \neq 1$ b)1 mo.: $\mathbf{a} \neq 2$ c) ∞ mo.: $\mathbf{a} = 2$, $\mathbf{b} = 1$.

---

4. Határozza meg az alábbi mátrix inverzét és igazolja is, hogy ez jobb- és baloldali inverz is! !

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

MO.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

---

5. Hol deriválható az $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$ függvény?

MO. Az origón és az $y = x$ egyenesen kívül mindenütt, mert ilyenekből van deriválhatóságot megőrző módon összerakva. $f(x,0) = \sqrt[3]{x^3} = x$ így $f_x(0,0) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 1$, és ugyanígy a másik: $f_y(0,0) = -1$. Mivel $\dfrac{f(x,y) - f(0,0) - (1,-1)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - y^3} - x + y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ és ennek a függvénynek nincs határértéke az origóban, hisz a tengelyek mentén konstans 0 az értéke míg pl. a $x = y$ mentén konstans $\neq 0$. Ami az $y = x$ egyenest illeti, ennek mentén már a parciálisok sem léteznek : $\dfrac{f(a+x,a) - f(a,a)}{x} =$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^3 + 3ax^2 + 3a^2x}}{x} = \sqrt[3]{1 + \frac{3a}{x} + \frac{3a^2}{x^2}},$$ aminek nyilvánvalóan nincs határértéke az $x = 0-$ban.

---

6. Határozza meg az $f(x,y) = 2x^2 - 3xy$ függvény $P = (1,3)$ pontbeli $v = (-1,2)$ irányú irányú iránymenti deriváltját!

MO. $\operatorname{grad} f = (4x - 3y, -3x)$, így $\operatorname{grad} f|_P = (-5,-3) \rightsquigarrow \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-5,-3)\cdot(-1,2) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ hisz $|v| = \sqrt{5}$.

2. Zárthelyi megoldásokkal

2000 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

1. Határozza meg az $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ függvénysorozatsorozat T konvergenciatartományát és mutassa meg, hogy (f_n) az egész T–n nem, de T minden korlátos részén egyenletesen konvergens!

MO. $\dfrac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$ az egész $\mathbb{R}$–en $\rightsquigarrow$ $|r_n(x)| = \left|\dfrac{x^n}{n!}\right| \le \dfrac{K^n}{n!} \longrightarrow 0$ ha $|x| \le K$ és $r_n(n) = \dfrac{n^n}{n!} \not\longrightarrow 0\,.$

---

2. Legyen $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ha $x \ne 0$, $f(0) = 1$. Döntse el, hogy létezik–e, és ha igen, számítsa ki az f 102. deriváltját az origóban!

MO. $\sin x$ origó körüli Taylor-sora alapján minden valós x–re: $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} \mp \ldots - \dfrac{x^{102}}{103!} + \ldots \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ f akárhányszor deriváható az origóban és $\dfrac{f^{(102)}(0)}{102!}x^{102} = -\dfrac{x^{102}}{103!}$ $\rightsquigarrow$ $f^{(102)}(0) = -\dfrac{102!}{103!} = -\dfrac{1}{103}$

---

3. Melyek igazak, melyek nem?

a) Generátorrendszertől független elem nem létezik

b) Generátorrendszer lineárisan független

c) Generátorrendszerhez bármely elemet hozzávéve generátorrendszer marad

d) Generátorrendszerből bármely elemet elhagyva megszűnik generátorrendszernek lenni

MO. a) Igaz: generátorrendszer def.–je. b) Nem igaz: lásd c).

c) Igaz: $x \in L = \mathcal{L}(X)$ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{L}(X \cup \{x\}) = \mathcal{L}(X) = L\,.$ d) Nem igaz: lásd c).

---

4. Mely **a** és **b** valós számokra lesz az alábbi egyenletrendszernek a) nulla b) egy c) végtelen sok megoldása?

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ -x + y + z &= 2 \\ -x - 2y + \mathbf{a}z &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

MO. Gauss–elimináció után:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}+2 & \mathbf{b}+1 \end{pmatrix}$$

tehát a) 0 mo.: $\mathbf{a} = -2$, $\mathbf{b} \ne -1$ b)1 mo.: $\mathbf{a} \ne -2$ c) ∞ mo.: $\mathbf{a} = -2$, $\mathbf{b} = -1$.

---

5. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$ az origón kívül és $f(0,0) = 0$. Határozza meg az f függvény $e_1 = (1,0)$ és $e_2 = (0,1)$ irányú iránymenti deriváltjait az origóban ill. a $P = (1,0)$ pontban, amennyiben ezek léteznek!

MO. Mind a négy parciális létezik: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ hisz $f(x,0) = f(0,y) = 0$ minden x, y–ra. Másutt mindenütt deriváható a függvény mert ilyenekből van deriválhatóságot megőrző módon összerakva és $f_x(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} - \dfrac{2\,x^2\,y}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{2\,x\,y^2}{(x^2+y^2)^2}$, azaz $f_x(1,0) = 0$, $f_y(1,0) = 1\,.$

---

6. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$ az origón kívül és $f(0,0) = 0$. Határozza meg az f függvény deriváltját az origóban ill. a $P = (1,0)$ pontban, amennyiben léteznek!

MO. Az origóban nem deriválható, mert még csak nem is folytonos: $f(0,x) = 0 \ne \frac{1}{2} = f(x,x)$, így $\lim\limits_{x\to 0} f(0,x) \ne \lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$. Az origón kívül mindenütt deriválható mert ilyenekből van deriválhatóságot megőrző módon összerakva és az előző pl. alapján $\operatorname{grad} f|_P = (0,1)$.

2. Zárthelyi megoldásokkal

2001 tavasz I. évf. 13.-18.tk.

1. Határozza meg az $f_n(x) = x + e^{-n^2}$ függvénysorozatsorozat konvergencia és egyenletes konvergencia tartományát!

MO. Tetsz. $x \in \mathbb{R}$–re $f_n(x) \longrightarrow x$, így tetsz. $x \in \mathbb{R}$–re $|r_n(x)| = e^{-n^2} \leq e^{-n^2} \longrightarrow 0$, azaz egyenletesen konvergens az egész számegyenesen.

---

2. Létezik-e olyan hatványsor, melynek határfüggvénye minden valós szám esetén az f függvény, ha

a) $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$ b) $f(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2$

Azon eset(ek)ben, mely(ek)re a válasz igen, adjon meg két ilyen hatványsort, ha van!

MO. a) Nem: hatványsor határfüggvénye akárhányszor deriválható, f pedig az origóban csak egyszer.
b) Igen: $f(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2 = x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 2 + 2x^2$ egy origó körüli, $f(1) = 4$, $f'(1) = 4$, $f''(1) = 4 \rightsquigarrow f(x) = 4 + 4(x-1) + 2(x-1)^2$ pedig egy $x = 1$ körüli hatványsor.

---

3. Számitsa ki az $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ értékét 0.01 pontossággal!

MO. e^x $x = 0$ körüli Taylor-sora alapján: $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \ldots\right) dx =$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \ldots \Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} + \ldots,$$

hiszen az integrálás és a határátmenet felcserélhető, tekintve, hogy a szóbanforgó hatványsor mindenütt konvergens (összegfüggvénye: e^{-x^2} minden valós x–re), így bármely korlátos intervallumon egyenletesen is konvergens. Az eredménysor nyilván Leibniz tipusú, így a hiba nem nagyobb, mint az első elhagyott tag abszolút értéke: $|r_n| \leq \dfrac{1}{(2n+1)n!} \leq 10^{-2} \rightsquigarrow (2n+1)n! \geq 100 \rightsquigarrow n \geq 4 \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{26}{35} \approx 0.743\,.$$

---

4. Melyek igazak, melyek nem?

a) Lineárisan független rendszer generátorrendszer
b) Generátorrendszer lineárisan független
c) Lineárisan független rendszerhez bármely új elemet hozzávéve lineárisan független marad
d) Lineárisan független rendszerhez bármely új elemet hozzávéve megszűnik lineárisan függetlennek lenni
e) Lineárisan független rendszerből bármely elemet elhagyva lineárisan független marad
f) Lineárisan független rendszerből bármely elemet elhagyva megszűnik lineárisan függetlennek lenni

MO. $\mathbb{R}^3$ – ban legyen $i \mathrel{\hat=} (1,0,0)$, $j \mathrel{\hat=} (0,1,0)$, $k \mathrel{\hat=} (0,0,1)$, $l \mathrel{\hat=} (1,1,1)$, $X \mathrel{\hat=} \{i,j\}$, $Y \mathrel{\hat=} \{i,j,k\}$, $Z \mathrel{\hat=} \{i,j,k,l\}$.
a) Nem igaz: X lin. fgtlen, de pl. $k \notin \mathcal{L}(X)$. **b)** Nem igaz: Z gen. rndsz., $l \in Z$, de $l \in \mathcal{L}(Z \setminus \{l\})$ **c)** Nem igaz: Y lin. fgtlen, de $Z = Y \cup \{l\}$, már nem az (lásd b)) **d)** Nem igaz: X lin.fgtlen és $Y = X \cup \{k\}$ is az **e)** Igaz **f)** Nem igaz: lásd e).

---

5. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$. Deriválható–e f az origóban?

MO. Nem: 1) A parciálisok az origóban: $f(x,0) = x$ minden x–re $\rightsquigarrow f_x(0,0) = f'(x,0) = 1$, $f(0,y) = y$ minden y–ra $\rightsquigarrow f_y(0,0) = f'(0,y) = 1$.

2) $g(h,k) \mathrel{\hat=} \dfrac{f(0+h,0+k) - 0 - (1,1)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2} - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = -\dfrac{h^2\,k + k^2\,h}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$ és g – nek nincs határértéke az origóban: $g(h,0) = 0 \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$, $g(h,h) = -\dfrac{2\,h^3}{(2\,h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{2}{2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{\sqrt{8}} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} \dfrac{2}{\sqrt{8}}$

---

6. Határozza meg az $f(x,y) = x^4 + y^2 - 32x$ függvény lokális szélsőértékhelyeit!

MO. grad $f(x,y) = (4x^3 - 32, 2y) = 0 \rightsquigarrow x = 2, y = 0$. A második parciálisok mártixa:

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ennek determinánsa $P = (2,0)$–ban $96 > 0$, így itt van szélsőértéke, és ez minimum, mert itt $f_{xx} = 48 > 0$.

2. Zárthelyi megoldásokkal

2003 tavasz B2 Serény

1. Határozza meg az $f(x) = \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sign}(\sin x)$ függvény Fourier–sorát!

MO. f páratlan $\rightsquigarrow$ $a_n = 0$ tetsz. $n-$re és $f(x)\cdot\sin nx$ páros, így

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2n}\big((-1)^n - 1\big) \rightsquigarrow b_n = \frac{1}{n} \text{ ha } n \text{ páratlan és } b_n = 0 \text{ egyébként} \rightsquigarrow \text{ a sor: } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x$$

2. Legyen $I = (0,1)$, C_1 az I–n folytonosan differenciálható függvények lineáris tere és minden g függvényre L_g azon $f \in C_1$ függvények halmaza, melyekre fennáll, hogy $f'(x) + 2f(x) = g(x)$ minden $x \in I$–re. Van–e olyan g, hogy L_g altere C_1–nek?

MO. Igen: $g \equiv 0$. Valóban, minden $c_1, c_2 \in \mathbb{R}-$re $g(x) = (c_1f_1 + c_2f_2)'(x) + 2\,(c_1f_1 + c_2f_2)(x) =$
$= c_1\big(f_1'(x) + 2f_1(x)\big) + c_2\big(f_2'(x) + 2f_2(x)\big) = c_1g(x) + c_2g(x) = (c_1 + c_2)g(x) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow (c_1 + c_2)g(x) = g(x) \rightsquigarrow g(x) = 0$ minden $x \in (0,1)-$re.

3. Mely **a** és **b** valós számokra lesz az alábbi egyenletrendszernek a) nulla b) egy c) végtelen sok megoldása ?

$$\begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ x + 2y + z &= -2 \\ 3x + \mathbf{a}z &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

MO. Gauss–elimináció után a kibővített mátrix: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & a+1 & b \end{pmatrix}$, tehát

a) 0 mo.: $a = -1,\ b \neq 0$, b) egy mo.: $a \neq -1$, c) ∞ sok mo.: $a = -1,\ b = 0$.

4. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{a} \end{pmatrix}$.

Mely **a** valós számok esetén invertálható az $\underline{\underline{A}}$ mátrix? Határozza meg $\underline{\underline{A}}$ inverzét az $\mathbf{a} = 0$ esetben!

MO. Minden $a \neq 1$ esetén. Az inverz $a = 0-$ra: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Hol deriválható az $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ függvény?

MO. Az origón kívül és az $y = -x$ egyenesen mindenütt, mert ilyenekből van deriválhatóságot megőrző módon összerakva. Az origóban azonban nem. Ugyanis $f(x,0) = \sqrt[3]{x^3} = x$ így $f_x(0,0) = 1$ és ugyanígy a másik, tehát $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 1$, továbbá $\dfrac{f(x,y) - f(0,0) - (1,1)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+y^3} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ és ennek a függvénynek nincs határértéke az origóban, hisz a tengelyek mentén konstans 0 az értéke, az $y = x, x > 0$ egyenes mentén pedig konstans $\dfrac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \neq 0$. Ami az $y = -x$ egyenest illeti, ennek mentén már a parciálisok sem léteznek: $\dfrac{f(a+x,-a) - f(a,a)}{x} = \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 3ax^2 + 3a^2x}}{x} = \sqrt[3]{1 + \dfrac{3a}{x} + \dfrac{3a^2}{x^2}}$, aminek nyilvánvalóan nincs határértéke az $x = 0-$ban.

6. Határozza meg az $f(x,y) = 3x^3 + 2xy$ függvény $P = (-1,3)$ pontbeli $v = (1,2)$ irányú iránymenti deriváltját a $P = (-1,3)$ pontban!

MO. $\operatorname{grad} f = (9x^2 + 2y, 2x)$, tehát $\operatorname{grad} f|_P = (15,-2)$, és $|v| = \sqrt{5}$, így $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(15,-2)\cdot(1,2) = \dfrac{11}{\sqrt{5}}$