2. Zárthelyi megoldásokkal

1996 ősz II.évf. 13.-18.tk.

1. Legyen $v(r) = r \cdot |r|^2$ egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki $\operatorname{div} v$–t minden $r \neq 0$ pontban!

2. Legyen $e = (i, j, k)$ az $\mathbf{R}^3$ szokásos bázisa. Számítsuk ki a $v(r) = k$ függvény felületmenti integrálját azon a $z = m$ síkbeli R sugarú körlapon, melynek középpontja a z tengelyen van!

3. Legyen $v(x, y) = (x^2 y, -y^2 x)$ egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki v felületmenti integrálját az

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\,,\ y \geq 0$$

implicit egyenletű ellipszisvonalon, mint egy kétdimenzióbeli valódi felületen!

4. Legyen c tetszőleges rögzített síkvektor. Számítsuk ki az a síkon értelmezett $u(r) = (c, r)$ skalárfüggvény felületmenti integrálját a koorditatengelyekkel párhuzamos oldalú, origóközéppontú, $2a$ oldalhosszúságú négyzeten, mint egy kétdimenzióbeli valódi felületen!

5. Adjuk meg az összes olyan z komplex számot, melyre

$$e^z = -1\ !$$

6. Számítsuk ki az

$$\int_K \frac{1}{z^2}\, dz$$

komplex integrál értékét, ha K az origóközéppontú $R = 2$ sugarú körvonal!

7. Számítsuk ki az

$$\int_K \frac{1}{z^2 - 1}\, dz$$

komplex integrál értékét, ha K az $O = (2, 0)$ középpontú $R = 2$ sugarú körvonal!

8. Hány olyan az egész komplex síkon reguláris függvény van melynek értéke az egységkör belsejében mindenütt 1?

Megoldások

1. $\operatorname{div} v = |r|^2 \operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad} |r|^2 = 2|r|^2 + (r \cdot 2|r| \frac{r}{|r|}) = 2|r|^2 + 2(r \cdot r) = 4|r|^2\,.$

2. A K körlap normálisa annak minden pontjában $v(r) = k$ irányú, így

$$\int_K v(r)\, dr = \int_K k\, dr = \int_K |k|\, |dr| = \int_K |dr| = |K| = R^2 \pi$$

3. Mivel $\operatorname{div} v = 2xy - 2xy = 0$, lezárva a felületet az x tengely $I = [-1, 1]$ szakaszával és erre alkalmazva a Gauss-Osztogradszkij tételt, azt kapjuk, hogy a keresett integrál v–nek I–re vett felületi integrálja, mely nulla, mert v itt nulla, hisz $v(x, y) = 0$, ha $y = 0$.

4. $\operatorname{grad} u = c$ konstans, így gradiens-tétellel a keresett integrál a négyzet területének és c–nek a szorzata, mely persze $4a^2 c$.

5.

$$e^z = -1 \quad \text{iff} \quad z = \pi (\operatorname{mod} 2\pi j) \quad \text{iff} \quad z = \pi + k \cdot 2\pi j\ .$$

6.

$$\int_K \frac{1}{z^2}\, dz = 0\,, \quad \text{hisz} \quad -\frac{1}{z} \quad \text{primitív függvénye} \quad \frac{1}{z^2}\text{–nek az egész körön.}$$

7. Mivel a körön belül $\dfrac{1}{z+1}$ reguláris, a Cauchy integrálformulával:

$$\int_K \frac{1}{z^2 - 1}\, dz = \int_K \frac{\frac{1}{z+1}}{z - 1}\, dz = 2\pi j \cdot \frac{1}{z+1}\Big|_{z=1} = \pi j\,.$$

8. Egyetlen: $f(z) = j$ minden $z \in \mathbf{C}$–re. Ugyanis ha egy g függvény esetén $g(z) = j$ minden $z \in \mathbf{C}$–re, melyre $|z| < 1$ és g reguláris az egész komplex síkon, akkor minden deriváltja az origóban nulla és g–t $z = 0$ körüli Taylor-sora mindenütt előállítja, tehát minden $z \in \mathbf{C}$–re: $g(z) = g(0) + g'(0) \cdot z + \dfrac{g''(0)}{2!} \cdot z^2 + \ldots = j + 0 + 0 + \ldots = j\,.$

2. ZÁRTHELYI MEGOLDÁSSAL
1998 ősz II.évf. 13.-18.tk.

1. Legyen $v(r) = (x^2, y)$ egy kétdimenziós vektortér és F az a háromszögvonal, melynek csúcsai az origó, a (0,1) és az (1,0) pontok. Számítsuk ki v fluxusát F–en mint egy kifelé irányított kétdimenzióbeli valódi felületen, kétféleleképpen: **a)** a fluxus definíciója alapján közvetklenül a v–nek az F–en való felületmenti integrálásával **b)** a Gauss-Osztrogradszkij tétel alapján.

MO. **a)** A tengelyek mentén a fluxus nulla, mert a vízszintes tengely pontjaiban csak vízszintes, a függőleges tengely pontjaiban pedig csak függőleges komponense van a függvénynek, így itt a felületi normális és a függvény egymásra merőlegesek. Ami az F átfogót illeti, egy egyenlete, melynek esetén a térrészből kifele van irányítva: $r(t) = (t, 1-t),\ t \in [0,1]$. Igy $\mathrm{CROSS}(\dot r(t)) = -\begin{vmatrix} i & j \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1)$ (persze!) és így a fluxus

$$\int_F v\,df = \int_0^1 v(r(t)) \cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t))\,dt = \int_0^1 (t^2, 1-t) \cdot (1,1)\,dt = \int_0^1 t^2 + 1 - t\,dt =$$
$$= \frac{t^3}{3} + t - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

b) $\operatorname{div} v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 2x + 1$, így Gauss-Osztogradszkij tétellel a fluxus (V a háromszöglap):

$$\int_F v\,df = \int_V \operatorname{div} v\,dV = \int_V 2x + 1\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2x + 1\,dy\,dx =$$
$$= \int_0^1 2xy + y\,\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 2x(1-x) + 1 - x\,dx = \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} + x\,\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

2. Legyen $v(r) = (y^2, x)$ egy kétdimenziós vektortér és L az a háromszögvonal, melynek csúcsai az origó, a (0,1) és az (1,0) pontok. Számítsuk ki v cirkulációját L–en mint egy pozitívan irányított kétdimenzióbeli görbén, kétféleleképpen: **a)** a cirkuláció definíciója alapján közvetklenül a v–nek az L–en való görbementi integrálásával **b)** a Stokes tétel alapján.

MO. Az előző példa duálisa. **a)** A tengelyek mentén a cirkuláció nulla, mert a vízszintes tengely pontjaiban csak függőleges, a függőleges tengely pontjaiban pedig csak vízszintes komponense van a függvénynek, így itt az érintő és a függvény egymásra merőlegesek. Ami az L átfogót illeti, egy egyenlete, melynek esetén, mint a térrész határa pozitívan van irányítva: $r(t) = (1-t, t),\ t \in [0,1]$. Igy a cirkuláció: $\displaystyle\int_L v\,dr = \int_0^1 v(r(t)) \cdot \dot r(t)\,dt$

$$= \int_0^1 (t^2, 1-t) \cdot (-1, 1)\,dt = \int_0^1 -t^2 + 1 - t\,dt = -\frac{t^3}{3} + t - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 =$$
$$= -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

b) $\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^2 & x \end{vmatrix} = 1 - 2y$, így Stokes tétellel a cirkuláció (V a háromszöglap):

$$\int_L v\,dr = \int_V \operatorname{rot} v\,dV = \int_V 1 - 2y\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - 2y\,dy\,dx = \int_0^1 y - y^2\,\Big|_0^{1-x} dx =$$
$$= \int_0^1 (1-x) - (1-x)^2 dx = -\frac{(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

3. Hogyan változna meg az első illetve második példa eredménye, ha az azokban megadott vektorfüggvényeket megcserélnénk?

MO. Mindkettő nulla volna, hisz az első példabeli függvény rotációja és a második példabeli függvény divergenciája mindenütt nulla.

4. Oldjuk meg a komplex számok körében a $\sin 4z = 0$ egyenletet !

MO. $\sin 4z = \dfrac{e^{4zj} - e^{-4zj}}{2} = 0$ iff $e^{4zj} = e^{-4zj}$ iff $4zj = -4zj \mod(2\pi j)$ iff $8zj = 0 \mod(2\pi j)$ iff $z = 0 \mod(\frac{\pi}{4})$.

5. Hol deriválható és hol reguláris az $f(z) = \overline{z}^2 + z$ függvény ?

MO. Seholsem reguláris és az origó kivételével nem is deriválható, mert egy deriválható ($f(z) = z$) és egy nem deriválható ($g(z) = \overline{z}^2$) függvény összege nem deriválható. Az, hogy $g(z)$ csak az origóban deriválható, pl. a Cauchy-Riemann diff. egyenletekből adódik: $(x - jy)^2 = x^2 - 2xyj - y^2 \rightsquigarrow u = x^2 - y^2$,
$v = -2xy \rightsquigarrow u_x = 2x = -2x = v_y$ iff $x = 0$ és $u_y = -2y = 2y = -v_x$ iff $y = 0$.

6. Számítsuk ki az $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z-2}}\,dz$ értékét !

MO. Mivel az integrandus reguláris az (egyszeresen összefüggő) egységsugarú origóközéppontú körlapon, Cauchy integráltétel miatt ennek határán az integrál nulla.

2. ZÁRTHELYI MEGOLDÁSSAL

1999 ősz II.évf. 13.-18.tk.

1. Adjon példát a következő tulajdonságú v síkverktorfüggvényekre mind a $v = v(r)$ egyenlet mind pedig az erővonalak vázlatos rajzának megadásával (ez utóbbi az utolsó két esetben extra pontokat ér):
a) $|v(r)| = |r|^2$ és $v(r) \parallel r$ minden $r \in \mathbf{R}^2$–re. **b)** $|v(r)| = 2$ és $v(r) \perp r$ minden $r \in \mathbf{R}^2$–re. **c)** Nem állandó, de csak $45°$–os komponense van. **d)** $|v(r)| = |r|$, $v(r) \not\perp r$ és $v(r) \not\parallel r$ minden $r \in \mathbf{R}^2$–re.

MO. a) $v(r) = r \cdot |r|$, **b)** $v(r) = \frac{\mathrm{CROSS}(r)}{|r|}$ **c)** $v(x,y) = (x,x)$, **d)** $v(r) = \dfrac{r + \mathrm{CROSS}(r)}{\sqrt{2}}$.
(Tényleg: $|r + \mathrm{CROSS}(r)|^2 = |(x-y, y+x)|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$)

---

2. Legyen $a > 0$ tetszőleges valós, N az a síkbeli négyzetvonal, melynek csúcsai: $(-a,-a)$, $(a,-a)$, (a,a), $(-a,a)$ és $v(x,y) = (0, y^3)$ egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsa ki v fluxusát N–en mint egy kifelé irányított kétdimenzióbeli valódi felületen kétféleleképpen: **a)** a fluxus definíciója alapján közvetklenül v–nek az F–en való felületmenti integrálásával **b)** a Gauss-Osztrogradszkij tétel alapján!

MO. a) v–nek csak függőleges komponense van, így csak a két vízszintes él: F_1 és F_2 mentén kell felületi integrált számítani, ahol $F_1 : r_1(x) = (x,a)$, $-a \le x \le a$, $\mathrm{CROSS}(r_1') = -\begin{vmatrix} i & j \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,1)$ és $-F_2 : r_2(x) = (x,-a)$, $-a \le x \le a$, $\mathrm{CROSS}(r_2') = -\begin{vmatrix} i & j \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,1)$. Így

$$\int_N v\,df = \int_{F_1} v\,df + \int_{F_2} v\,df = \int_{F_1} v\,df - \int_{-F_2} v\,df = \int_{-a}^{a} (0,a^3) \cdot \mathrm{CROSS}(r_1')\,dy - \int_{-a}^{a} (0,-a^3) \cdot \mathrm{CROSS}(r_2')\,dy =$$

$$= \int_{-a}^{a} (0,a^3) \cdot (0,1)\,dy - \int_{-a}^{a} (0,-a^3) \cdot (0,1)\,dy = \int_{-a}^{a} a^3\,dy + \int_{-a}^{a} a^3\,dy = 2\int_{-a}^{a} a^3\,dy = 4a^4 .$$

b) $\operatorname{div} v = 3y^2$ így (ha V a négyszöglap): $\displaystyle\int_N v\,df = \int_V \operatorname{div} v\,dV = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} 3y^2\,dy\,dx = \int_{-a}^{a} y^3\big|_{-a}^{a}\,dx =$

$$= \int_{-a}^{a} a^3 - (-a^3)\,dx = 2\int_{-a}^{a} a^3\,dx = 4a^4 .$$

---

3. Legyen $v(r) = r \cdot |r|$ minden $r \in \mathbf{R}^2$ esetén. Számítsa ki $\operatorname{rot} v(r)$ értékét minden $r \neq 0$ pontban!

MO. $\operatorname{rot} v(r) = \operatorname{rot}(r \cdot |r|) = |r| \cdot \operatorname{rot} r - \mathrm{CROSS}(r) \cdot \operatorname{grad}|r| = 0$, mert $\operatorname{rot} r = 0$ pl. mert $r' = I$ szimmetrikus és $\operatorname{grad}|r| = \dfrac{r}{|r|} \parallel r \perp \mathrm{CROSS}(r)$.

---

4. Keressük meg az $f(z) = \sin z$ komplex függvény összes gyökhelyét!

MO. $\sin z = 0$ iff $\dfrac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = 0$ iff $e^{jz} = e^{-jz}$ iff $jz = -jz \pmod{2\pi j}$ iff $2jz = 0 \pmod{2\pi j}$ iff iff $z = 0 \pmod{\pi}$, vagyis a gyökhelyek a valós sin gyökhelyeivel egyeznek meg.

---

5. Hol deriválható az $f(z) = z^2 e^{\mathrm{Re}\, z}$ komplex függvény ?

MO. Az origó kivételével sehol mert egy deriválható és egy nem deriválható függvény szorzata biztosan nem deriválható azokban a pontokban, melyekben egyik sem 0 és nyilván Cauchy–Riemann de.–ek alapján a $g(z) = e^x$ sehol sem deriválható ($u_x = e^x \neq 0 = v_y$). Az origóban viszont deriválható, mert

$$\frac{f(0+z) - f(0)}{z} = \frac{z^2 e^x}{z} = z\,e^x \xrightarrow[z \longrightarrow 0]{} 0$$

6.

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{z^{10}} - 1}{z^{10}}\,dz = ?$$

MO. Legyen $f(z) = \dfrac{e^{z^{10}} - 1}{z^{10}}$. Ez $z \neq 0$–n reguláris és $z = 0$–ban megszüntethető szakadása van ($\lim_{z \longrightarrow 0} f(z) = 1$), tehát minden origóközéppontú körlapon korlátos és minden az origótól megfosztott körlapon reguláris is, így integrálja minden origóközéppontú körvonalon 0. (VAGY: $\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = 0$).

2. zárthelyi megoldásokkal 2000 ősz

1. Legyen F az $[xy]$ síkban fekvő R sugarú origóközéppontú felfelé irányított körlap és k a z tengely irányú egységvektor. $\int_F k\,|k\times r|\,df = ?$

MO. F egyenlete: $r = r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 0)$, $0\le u\le R$, $0\le v\le 2\pi$, így F–en

$$k\times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u\cos v & u\sin v & \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (u\sin v, -u\cos v, 0),\ r_u\times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (0,0,u) = u\,k$$

$\rightsquigarrow\ |k\times r| = u\ \rightsquigarrow$

$$\int_F k\,|k\times r|\,df = \int_0^{2\pi}\int_0^R k\,u\cdot(r_u\times r_v)\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^R k\,u\cdot k\,u\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^R u^2 du\,dv = \frac{2\pi R^3}{3}$$

---

2. Legyen F az R sugarú origóközéppontú kifelé irányított gömb és k a z tengely irányú egységvektor.

$$\int_F (k\times r)\,df = ?$$

MO.

A gömb normálisa mindenütt sugár–, azaz r–irányú, tehát merőleges az integrandusra, következésképpen az integrál 0.

---

3. Legyen $v(r) = (y^2, x)$ egy kétdimenziós vektortér és L az a háromszögvonal, melynek csúcsai az origó, a (0,1) és az (1,0) pontok. Számítsuk ki v vonalmenti integrálját L–en mint egy pozitívan irányított kétdimenzióbeli görbén!

MO.

A tengelyek mentén az integrál nulla, mert a vízszintes tengely pontjaiban csak függőleges, a függőleges tengely pontjaiban pedig csak vízszintes komponense van a függvénynek, így itt az érintő és a függvény egymásra merőlegesek. Ami az L átfogót illeti, egy egyenlete (melynek esetén, mint a térrész határa pozitívan van irányítva: $r(t) = ((1-t), t)$, $t\in[0,1]$. Igy az integrál:

$$\int_L v\,dr = \int_0^1 v(r(t))\cdot\dot r(t)\,dt = \int_0^1 (t^2,(1-t))\cdot(-1,1)\,dt = \int_0^1 -t^2+(1-t)\,dt = -\frac{t^3}{3}+t-\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 =$$
$$= -\frac{1}{3}+1-\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

---

4. Hol deriválható és hol reguláris az $f(z) = \overline{z}^2 + z$ függvény ?

MO. Seholsem reguláris és az origó kivételével nem is deriválható, mert egy deriválható ($f(z) = z$) és egy nem deriválható ($g(z) = \overline{z}^2$) összege nem deriválható. Az, hogy $g(z)$ csak az origóban deriválható, a Cauchy-Riemann diff. egyenletekből adódik:

$(x-jy)^2 = x^2 - 2xyj - y^2 \ \rightsquigarrow\ u = x^2-y^2, v = -2xy \ \rightsquigarrow\ u_x = 2x = -2x = v_y$ és $u_y = -2y = 2y = -v_x$ iff $x = y = 0$.

---

5. Legyen L a 2 sugarú pozitívan irányított felső félkör. $\int_L \frac{1}{z^2}\,dz = ?$

MO.

Van olyan tartomány, ahok a reguláris integrandusnak van primitív függvénye: $-\frac{1}{z}$, így $\int_L \frac{1}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z}\Big|_1^{-1} = 2$

6.

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}\,dz = ?$$

MO.

Az integrál 0, mert az integrandus egy pont kivételével reguláris az egyszeresen összefüggő körlapon és ott korlátos is, VAGY persze Cauchy integrál formulával $\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z}\,dz = 2\pi j\sin 0 = 0$

2. zárthelyi megoldásokkal

II. 2001 ősz

1. Legyen L az az $[xy]$ síkban fekvő, két szakaszból álló töröttvonal, melynek csúcsai a $(0,0)$, a $(0,1)$ és az $(1,0)$ pontok. L irányítása olyan, hogy az origó a kezdőpontja. Legyen j az y tengely irányú egységvektor. $\int_L j\,dr = ?$

MO. Zárttá téve a görbét az origót és az $(1,0)$ pontot összekötő szakasszal, melyen az integrál 0, mert irányvektora merőleges az integrandusra, az integrál Stokes–tétellel 0, így L–en is 0. VAGY: az y tengelyen az integrál: $\int_{L_1} (j)_e\,|dr| = \int_{L_1} 1\,|dr| = 1 \cdot \int_{L_1} |dr| = 1 \cdot 1 = 1$ és a másik darabon ugyanígy: $\int_{L_2} (j)_e\,|dr| = -\int_{L_2} \frac{\sqrt{2}}{2}\,|dr|$

---

2. Legyen $v(x,y) = (3\,x\,y\,, -y^2)$ és F a $(0,0)$ $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ csúcsú kifelé irányított négyzetvonal a síkban. $\int_F v\,df = ?$

MO. Gauss–Osztrogradszkijjal: $\operatorname{div} v = y \rightsquigarrow \int_F v\,df = \int_0^1 \int_0^1 y\,dx\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

---

3. Számítsa ki a $v(r) = \operatorname{rot}\operatorname{grad}|r|^2$ értékét mindenüt, ahol létezik!

MO. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$ mindig, ha az u, ahogy az $u = |r|^2$ is, kétszer folytonosan deriválható.

---

4. Hol deriválható az $f(x+jy) = j\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$ komplex függvény?

MO. $f(x+jy) = y + j\,x \rightsquigarrow u = y\,,\ v = x \rightsquigarrow u_y = 1 \neq -1 = -v_x \rightsquigarrow$ sehol sem elégíti ki a Cauchy–Riemann d.e.-eket.

---

5. $j^j = ?$

MO. $j^j = e^{\ln j^j} = e^{j \ln j}$, $\quad \ln j = \ln|j| + j \operatorname{arc} j = \ln 1 + j\,\frac{\pi}{2} = j\,\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow j^j = e^{j \ln j} = e^{j\,j\,\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ (≈ 0.20788)

---

6. Számítsa ki az

$$\int_K \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

komplex integrál értékét, ha K az $O = (2\,j, 0)$ középpontú $R = 2$ sugarú körvonal!

MO. Mivel a körön belül $\frac{1}{z+j}$ reguláris, a Cauchy integrálformulával:

$$\int_K \frac{1}{z^2+1}\,dz = \int_K \frac{\frac{1}{z+j}}{z-j}\,dz = 2\pi j \cdot \frac{1}{z+j}\Big|_{z=j} = 2\pi j \cdot \frac{1}{2\,j} = \pi\,.$$