Alapfogalmak

1. Matematika: bizonyos szerkezetű kijelentő mondatok.

(1) Kijelentő mondatok

Naívan azt gondolnánk, hogy minden kijelentő mondat vagy igaz, vagy hamis. (Azaz, ha kérdő mondattá fogalmazzuk át, akkor - legalábbis elvben - lehet rá igennel vagy nemmel válaszolni.) DE ez a a felosztás nem jó.

$$\text{értelmetlen} \longleftrightarrow \text{értelmes}$$

- **Értelmetlen**

  (a) Szintaktikailag (formai) hibás

  Nem nem Te hat óra, Te se magyar beszélni kicsi.

  (b) Szemantikailag (tartalmilag) hibás Pl.

  A pő, ha engemély kimár
  De mindegegy ha vildagár,
  Mert engemély minder bagul,
  Mint vélgaban a bégahúr.

  (Karinthy Frigyes: "Mint vélgaban")

Ez az egész persze nem kijelentő mondat (honnan tudjuk ?!!, azt azonban tudjuk, hogy vers és a költő szomorú) és például a követkeő példa az ún. **elhallgatott presuppositiora** sem az: Rendőrségi kihallgatás:

Igennel vagy nemmel válaszoljon! Még mindig veri a feleségét?

de a másik kedvencem az:

A cosinus tételnek paprikáscsirke illata van.

Sokan ide sorolják a híres **Hazug paradoxon**-t is:

Én most hazudok.

Ugyanis ez nem lehet sem igaz, sem hamis.

Meglepő módon - amint majd látni fogjuk - ezzel a kérdéskörrel kapcsolatos a következő rejtvénysorozat: Bombázós rejtvény 1.

- **Értelmes**

Ezek valában lehetnek igazak ill. hamisak. Az igazi feladat tehát ilyen mondatokat mondani, vagy úgy kérdezni, hogy ilyen válasz adható legyen. Vizsgán lényegében nem érdekel, hogy a hallgató válasza jó-e vagy rossz (igaz-e vagy hamis), igazán csak az ÉRTELMES legyen. Ez pedig a SZERKEZETÉN múlik.

(2) Matematikai kijelentések szerkezete

Olyan mondatok, melyekben (előzőekben már definiált) MATEMATIKAI OBJEKTUMOK, tulajdonságok stb. (pl. szám, halmaz, függvény, páros, kisebb, összeg, eleme, osztható stb.) és ún. LOGIKAI KONNEKTÍVUMOK (és, vagy, ha ... akkor, stb.) szerepelnek. Ezeket persze sokszor szimbólumaik segítségével szerepeltetjük (a matematikában szokásos nyelvet, mely magyar szöveg és szimbólumok sajátos elegye, "matematikai magyarnak" is nevezhetjük. Pl. kettő meg három helyett persze 2+3-at írunk stb.)

Ami új, hogy a logikai konnektívumokra is szimbólumokat vezetünk be, mert ahogy a "(2 meg 3)-szor 5"-nél áttekinthetőbb a "(2+3)·5", ugyanez igaz a logikai konnektívumokra is. Ezek szimbólumai:

$$\neg, \vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, \forall, \exists$$

• **Példa** Teljes indukció (ω a term. számok, $\in$ az "eleme" reláció), **HF:** $6|n^3+5n$

Bármely a természetes számokon értelezett p tulajdonság esetén

$$\boldsymbol{p(0) \wedge (\forall n \in \omega)[p(n) \Rightarrow p(n+1)] \Longrightarrow (\forall n \in \omega)p(n)}$$

2. Alapvető matematikai objektumok

(1) HALMAZOK

• **Speciális számhalmazok:** $\boldsymbol{\omega}$ **(**$\mathbb{N}$**),** $\mathbb{Z}$**,** $\mathbb{Q}$**,** $\mathbb{R}$**,** $\mathbb{C}$

• **Halmazrelációk, -műveletek :** $\emptyset$**,** $\in$**,** $=$**,** $\subseteq$**,** $\cap$**,** $\cup$**,** $^{-}$**,** $\setminus$.

• **Jelölés:** Ha $p(x)$ azt jelöli, hogy x p tulajdonságú (például $p(x)$ azt jelölheti, hogy "x páros", vagy "x kisebb, mint 2"), akkor a H halmaz p tulajdonságú elemeinek halmazát így jelöljük: $\boldsymbol{\{x \in H : p(x)\}}$. Például a páros természetes számok halmaza ($a|b$ annak szimbólikus jelölése, hogy b osztható a-val): $\{x \in \omega : 2|x\}$.

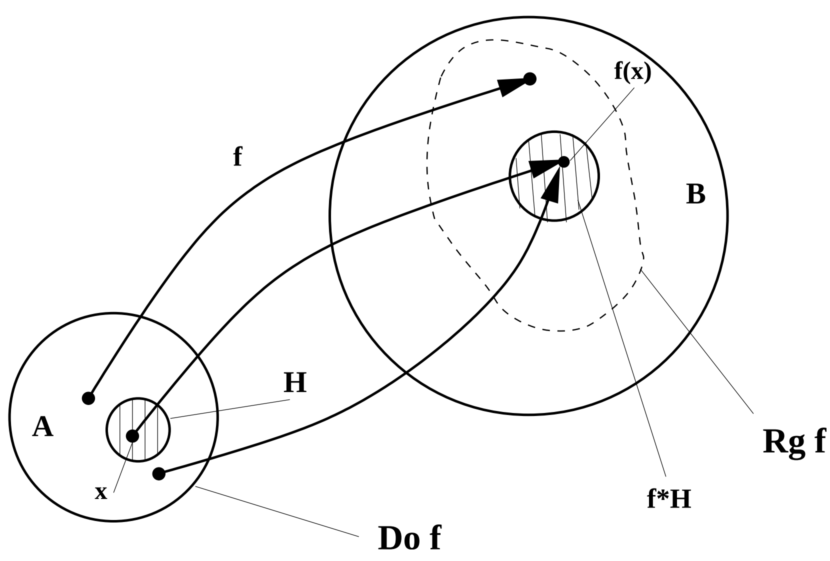
• **Jelölés:** Adott A halmaz rendezett párjaiból (n-eseiből) alkotott halmaz:
$A^2 \doteq \{(a,b) : a,b \in A\}$, $A^n \doteq \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) : a_i \in A\}$, $n \in \omega$

• **Példák**
- $E =$ emberek halmaza, Házaspárok $= H \subseteq E^2$,
- Sík pontjainak halmazának jellemzése koordináta-párokkal, Föld felületének jellemzése szélességi-hosszúsági koordinátapárokkal.

(2) FÜGGVÉNYEK

(a) Definíció

Szinonímák: hozzárendelés, leképezés, megfeleletetés, transzformáció, operáció (utóbbi kettőt inkább speciális esetekben használjuk, pl. a tükrözés geometriai transzformáció).



Jelölés: $f : A \longrightarrow B$. Do $f = A$, Rg $f \subseteq B$.

Függvényekkel már találkoztunk, azok általában számhalmazok között működtek. De függvény lehet akármit akármihez rendelő megfeleltetés:

• **Példák:** (nem valós függvényekre)

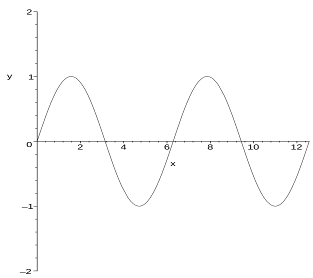
emberek $\longleftrightarrow$ nevek magyar szavak $\longleftrightarrow$ angol szavak emberek $\longleftrightarrow$ telefonszámok

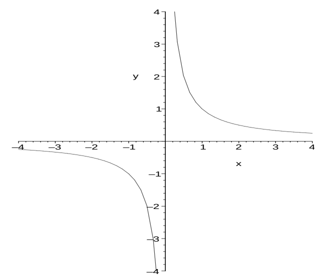
Sorozatok: $(1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots)$, $a : \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$, mégpedig $a_n = 1/n$ tetsz. $n \in \omega$.
$(1, 1, 2, 720, \ldots)$, $a : \omega \longrightarrow \omega$, $a_n = ?$

Majd látni fogunk például függvényeken értelmezett függvényeket is.

• **Szemléltetés:** Valós esetben **függvény gráfja**:

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = y\} = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Do}(f)\}$$





• **Kérdés:** Lehet-e kör egy függvény gráfja ? (Egyértelműség)

(b) Halmaz függvény szerinti képe

$$\boldsymbol{f^*H \mathrel{\hat{=}} \{y \in B : (\exists x \in H) f(x) = y\}} \quad \text{minden } H \subseteq \mathrm{Do}\, f\text{-re}$$

• **Példák** Fenti függvények és ismert matematikai függvények eetén.
Pl. ember-név esetén *fiú*nevek, $f(x) = \sin x$, $H = [\pi/6, \pi/3] \rightsquigarrow f^*H = [1/2, \sqrt{3/2}]$.

(c) Öszetett függvény, függvény kompozíció

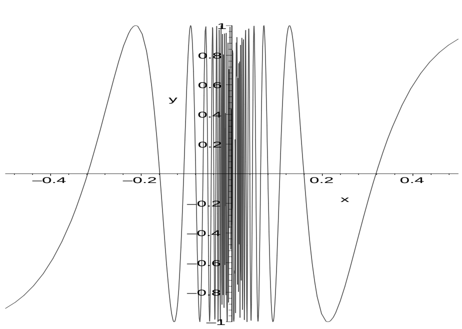
$g : A \longrightarrow B, f : C \longrightarrow D$, $C \subseteq \mathrm{Rg}\, f$. $(f \circ g)(x) \mathrel{\hat{=}} f(g(x))$, $x \in A$

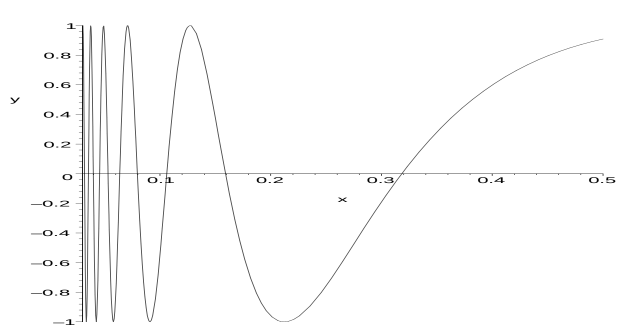
• **Példák**

• Ha van magyar-angol és angol-szuhaéli szótáram, akkor van magyar-szuhaéli szótáram,

Egyszerű függvényekből nagyon egyszerűen lehet rendelésre mindenféle őrült függvényeket csinálni:

• $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1/x$, $(f \circ g)(x) = \sin 1/x$.





(d) Invertálhatóság

Egyik legalapvetőbb tulajdonság, hogy fennáll-e egy adott $H \subseteq \mathrm{Do}\, f$ halmazon, hogy

$$(\forall x, y \in H)(x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y))$$

vagyis, hogy f H-n ún. **kölcsönösen egyértelmű** függvény-e. (Előző ábrán legalsó nyíl nincs.) Ha igen, azt mondjuk, hogy f **invertálható**, azaz létezik az inverze.

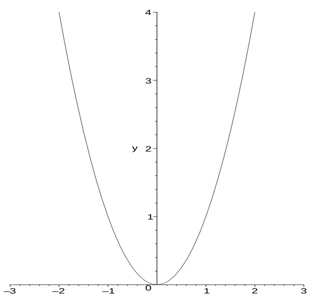
• **Inverz függvény** (Egy adott halmazon) (Megfordított nyilak=visszafele függvény)
Ha f invertálható $H \subseteq \mathrm{Do}\, f$-en, akkor f inverze H-n az a $g : f^*H \longrightarrow H$ függvény, melyre $g(f(x)) = x$ minden $x \in H$. Ez a függvény minden y-hoz azt az x-et rendeli, amelyikhez f az y-t rendelte. **Jelölés**: f^{-1}.

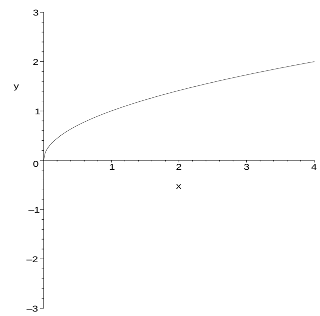
• **Például**: szótárak, telefonkönyvek, képletgyüjtemény esetén:
másik szótár, tudakozó, ?? $\longrightarrow$ ezért kell a képleteket memorizálni !!

$f(x) = x + 2 \rightsquigarrow y = x + 2 \rightsquigarrow x = y - 2 \rightsquigarrow f^{-1}(y) = y - 2 \rightsquigarrow f^{-1}(x) = x - 2$

Nem mindig "fejezhető ki" ilyen egyszerűen.

$f(x) = x^2$. Csak nem negatívakra (vagy nem pozitívakra egy-egy értelmű, itt *definícióval*: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Inverz gráfja.





Állítás

$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in H), \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad (y \in f^*H),$
$(f^{-1})^{-1} = f \quad (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

(3) RENDEZÉS

Rögzítjük a már jól ismert $<$ ill. $\leq$ tulajdonságait, melyeket használni fogunk és egy kicsit általánosítjuk is, hogy ne csak számok közötti összehasonlítást tudjunk végezni.

(a) Definíció

• Az $(A, <)$ **rendezett halmaz** (ill. $<$ **rendezés** A-n) ha

(i) $a \not< a$ minden $a \in A$-ra (irreflexív)

(ii) $a < b \wedge b < c \Longrightarrow a < c$ minden $a, b, c \in A$-ra (tranzitív)

• $a \leq b \stackrel{\circ}{=} a < b \vee a = b$

• **Például** a nagyságszerinti rendezés ω-n vagy $\mathbb{R}$-en, ω-n az oszthatóság, a szigorú tartalmazás ($A \subset B \stackrel{\circ}{=} A \subseteq B \wedge A \neq B$) a halmazok között.

Egy rendezés **lineáris** (vagy **trichotom**) ha minden két elem összehasonlítható (a halmazok tartalmazása vagy ω-n az oszthatóság nem ilyen): $a < b \vee a = b \vee a > b$ (azaz $a \leq b \vee b \leq a$) minden $a, b \in A$-ra.

Állítás (i) $<$ aszimmetrikus, azaz $a < b \Rightarrow b \not< a$ (ii) $a < b \rightsquigarrow a \neq b$

Bizonyítás. Indirekt:
(i) Tranzitivitással $a < b \wedge b < a \Rightarrow a < a$, ami ellentmond az irreflexivitásnak.
(ii) $a < b \wedge a = b \rightsquigarrow a < a$, ami ellentmond az irreflexivitásnak.

Házi feladat Bizonyítsuk be, hogy
(i) $\leq$ reflexív és antiszimmetrikus, azaz $a \leq a$ és $a \leq b \wedge b \leq a \Longrightarrow a = b$
(ii) lineáris rendezés esetén az $a < b, a = b, b < a$ esetek közül pontosan az egyik áll fenn.

(b) Speciális részhalmazok

• **Intervallum**: $(A, <)$, rendezett $a, b \in A, a < b$ esetén:

$(a,b) \circeq \{x \in A : a < x < b\}$, $[a,b] \circeq \{x \in A : a \leq x \leq b\}$, $(\infty, a] \circeq \{x \in A : x \leq a\} \ldots$

(félig) nyílt, zárt (felülről, alulról) korlátos ...

• **Korlátosság** (Fenti általánosítása)

Definíció

Legyen $(A, <)$ rendezett halmaz, $H \subseteq A$.

- H **felülről (alulról) korlátos** ha $(\exists K \in A)(\forall x \in H)(x \leq K)$ $(x \geq K)$.
- H **korlátos** ha felülről és alulról is az ($\mathbb{R}$-en ez ekvivalens: $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in H)(|x| \leq K)$).
- h H **suprémuma (infimuma)** ($\sup H$, $\inf H$) ha h legkisebb felső (alsó) korlát, azaz
  - h felső (alsó) korlát
  - K felső (alsó) korlát $\rightsquigarrow h \leq K (x \geq K)$.

Nyilván csak felülről (alulról) korlátos halmaznak van suprémuma (infimuma).

Példa (6 eset: 2 helyre választhatunk: 1. helyre 4 félét $(\exists K/x, \forall K/x)$, 2. helyre már csak 2 félét (K-hoz x kell ill. fordítva) és a két ekvivalenset ki kell vonni: $4 \cdot 2 - 2 = 6$)

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges. Mit tudunk H-ról, ha

- $(\exists K > 0)(\exists x \in H)(|x| \leq K)$: $H \neq \emptyset$
- $(\forall K > 0)(\forall x \in H)(|x| \leq K)$: $H \subseteq \{0\}$
- $(\exists x \in H)(\forall K > 0)(|x| \leq K)$: $0 \in H$
- $(\forall K > 0)(\exists x \in H)(|x| \leq K)$: $\inf H = 0$
- $(\exists K > 0)(\forall x \in H)(|x| \leq K)$: H korlátos
- $(\forall x \in H)(\exists K > 0)(|x| \leq K)$: H tetszőleges

Példa Olyan felülről korlátos halmazra, melynek NINCS suprémuma:

$A \circeq \{x \in \mathbb{Q} : x = \pm 1/n\}$, $H \circeq \{x \in \mathbb{Q} : x = -1/n\}$. Ekkor $G \circeq \{x \in \mathbb{Q} : x = 1/n\}$ minden eleme felső korlátja H-nak, de ezek között nincsen legkisebb.

(c) Függvények és rendezés

Definíció

Legyen $(A, <), (B, <)$ rendezett halmazok, $D \subseteq A$, $f : D \longrightarrow B$, $H \subseteq D$.

- f **(szigorúan) (monoton) növő (csökkenő)** H-n ha minden $x, y \in H$ esetén
  $x \leq y \rightsquigarrow f(x) \leq f(y), \ (f(x) \geq f(y)) \ (f(x) < f(y), \ f(x) \geq f(y))$.
- f **felülről (alulról) korlátos** H-n ha f^*H az.
  (azaz $(\exists K \in B)(\forall x \in H)(f(x) \leq K) \ (f(x) \geq K)$.
- f **korlátos** H-n ha felülről és alulról is az.
- $\sup_{x\in H} f(x) \circeq \sup f^*H, \ \inf_{x\in H} f(x) \circeq \inf f^*H$.
- Ha van $x \in H$, hogy $f(x) = \sup_{x\in H} f(x) \quad (f(x) = \inf_{x\in H} f(x))$, akkor **felveszi a suprémumát (infimumát)** H**-n**, ez a **maximuma (minimuma)** H**-n**.

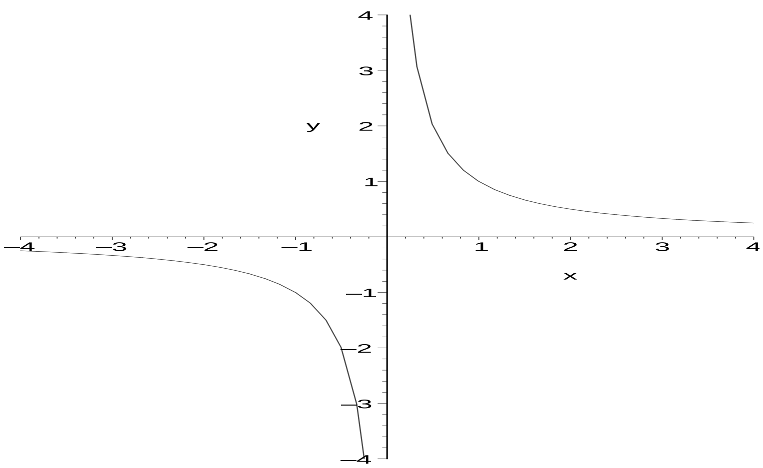
Nyilván csak adott halmazon felülről (alulról) korlátos függvénynek van itt suprémuma (infimuma).

Példa

- Ideális esetben *ceteris paribus* (= ha az egyebek egyenlők) a lakás ár a lakás alapterület függvényében nő, a légnyomas a tengerszint feletti magassággal csökken.
- Legyen $\mathbb{R}$-en $c < 0, \ f(x) \circeq x + c, \ g(x) \circeq c \cdot x$. Ekkor tudjuk, hogy f monoton nő, g pedig monoton csökken.

Példa

$\mathbb{R}$-en: $f(x) = 1/x$



- $\inf_{x\in(0,1)} f(x) = \inf_{x\in(0,1]} f(x) = 1$ elöbbin nem, utóbbin felveszi
- $\nexists \sup_{x\in(0,1)} f(x), \ \sup_{x\in(0,1]} f(x)$ mert felülről nem korlátos
- $\nexists \inf_{x\in(-1,0)} f(x), \inf_{x\in[-1,0)} f(x)$ mert alulról nem korlátos
- $\sup_{x\in(-1,0)} f(x) = sup_{x\in[-1,0)} f(x) = -1$ elöbbin nem, utóbbin felveszi
- $\inf_{x\in(1,2)} f(x) = \inf_{x\in[1,2]} f(x) = 1/2$ elöbbin nem, utóbbin felveszi
- $\sup_{x\in(1,2)} f(x) = \sup_{x\in[1,2]} f(x) = 1$ elöbbin nem, utóbbin felveszi
- $\inf_{x\in(1,\infty)} f(x) = \inf_{x\in[1,\infty]} f(x) = 0$ egyiken sem veszi fel
- $\sup_{x\in(1,\infty)} f(x) = \sup_{x\in[1,\infty]} f(x) = 1$ elöbbin nem, utóbbin felveszi

Állítás

Ha $f : A \longrightarrow B$ szigorúan monoton függvény, A és B lineárisan rendezett halmazok, akkor invertálható és f inverze ugyanolyan értelemben monoton.

1. Bizonyítás. (FORMÁLIS)

Legyen $f : A \longrightarrow B$ szigorúan növő (a másik analóg). Ekkor
(i) $x \neq y \rightsquigarrow x < y \vee y < x \rightsquigarrow f(x) < f(y) \vee f(y) < f(x) \rightsquigarrow f(x) \neq f(y)$.

(ii) Indirekt: $a, b \in \operatorname{Rg} f,\ a < b,\ f^{-1}(a) \geq f^{-1}(b)$.

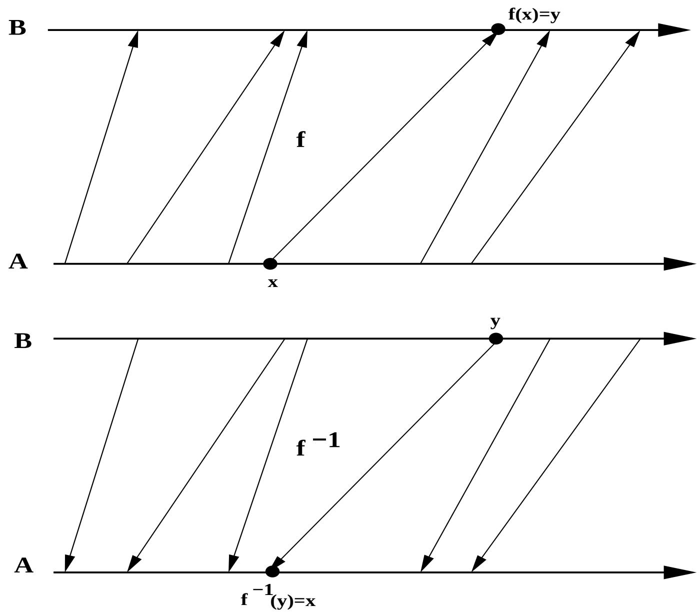
Ekkor $a = f(x),\ b = f(y)$ valamely $x, y \in A$, így

$a < b \rightsquigarrow f(x) < f(y) \rightsquigarrow x = f^{-1}(a) \geq f^{-1}(b) = f^{-1}(f(x)) = y \rightsquigarrow x \geq y \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow f(x) \geq f(y)$ ellentmondva $f(x) < f(y)$-nak.

2. Bizonyítás. (INFORMÁLIS függvény-szemléltés ún. **nyíldiagrammal**)

Szigorúan növő IFF a nyilak páronként közös pont nélküliek. Ekkor (mivel nincs közös pont a végpontokban sem) van inverz, melynek diagrammja egyszerűen a nyilak megfordítása, szintén ilyen:



Szigorúan csökkenő IFF a nyilaknak páronként van közös belső pontjuk, inverz ugyanilyen: