Mintapéldák

Felületi integrál

1. Legyen F az origóközéppontú R sugarú háromdimenzióbeli kifelé irányított gömbfelület és $v(r) = |r|^2 r$ minden $r \in \mathbb{R}^3$ esetén. Határozza meg a v vektor-vektor függvény F-en vett felületmenti integrálját!

MO. Jelölések: $\int_F v\,df$ a v függvény F-en vett felületmenti integrálja, $\int_F v\,|df|$ függvény felszín szerinti integrálja, $|F|$ az F felszíne.

(1) Felhasználjuk, hogy egy függvény felületmenti integrálja megegyezik a függvénynek a felületi normálisra eső vetületének felszín szerinti integráljával. Ezzel:

$$v(r) = r|r|^2 \;||\; r \;\rightsquigarrow\; v(r)\,||\,n \text{ a gömb normálisa } \;\rightsquigarrow\; v_n = |v|\,, \text{ a gömbön}: |r| = R \;\rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \int_F v\,df = \int_F v_n\,|df| = \int_F R^3\,|df| = R^3 \int_F |df| = R^3|F| = R^3 \cdot 4R^2\pi = 4R^5\pi\,.$$

(2) Gauss-Osztrogradszkij tétellel:

Felhasználjuk, hogy ha u egy skalár-vektor függvény, v pedig egy vektor-vektor függvény, akkor $\operatorname{div}(u\,v) = u \operatorname{div} v + v \cdot \operatorname{grad} u$ (persze ott ahol mind u mind v deriválható), továbbá, hogy ha f egy valós függvény, akkor láncszabállyal $\operatorname{grad} f(|r|) = f'(|r|) \cdot \operatorname{grad}|r| = f'(|r|) \cdot \dfrac{r}{|r|}$. Így

$\operatorname{grad}|r|^2 = 2|r| \cdot \frac{r}{|r|} = 2|r| \cdot r\,,\;\; \operatorname{div}(|r|^2 r) = |r|^2 \operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad}|r|^2 = 3|r|^2 + 2|r||r|^2 = 5|r|^2\,.$

Legyen V az F által határolt térrész (a gömbtest). Gömbi koordinátákkal:

$$\int_F v\,df = \int_V \operatorname{div} v\,dV = 5\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\,r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = -5\frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \cos\vartheta\big|_0^{\pi} = 5\frac{R^5}{5} \cdot 4\pi = 4R^5\pi$$

(3) Felületmenti integrál kiszámítására szolgáló általános formulával:

F egyenlete: $r = r(u,v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u)\,,\; 0 \le u \le \pi\,,\; 0 \le v \le 2\pi\,.$

Ebből: $|r|^2 = R^2\sin^2 u\cos^2 v + R^2\sin^2 u\sin^2 v + R^2\cos^2 u = R^2\sin^2 u + R^2\cos^2 u = R^2$

$r_u(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, -R\sin u)$

$r_v(u,v) = (-R\sin u\sin v, R\sin u\cos v, 0)$

$r_u \times r_v = (R^2\sin^2 u\cos v, R^2\sin^2 u\sin v, (R^2\cos u\sin u\cos^2 v + R^2\cos u\sin u\sin^2 v)) =$

$= (R^2\sin^2 u\cos v, R^2\sin^2 u\sin v, R^2\cos u\sin u))$

$v(r(u,v)) = r|r|^2 = R^2(R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u)$

$v(r(u,v)) \cdot r_u \times r_v =$

$= R^2(R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u) \cdot (-R^2\sin^2 u\cos v, R^2\sin^2 u\sin v, R^2\cos u\sin u) =$

$= R^5(\sin^3 u\cos^2 v + \sin^3 u\sin^2 v + \cos^2 u\sin u) = R^5(sin^2 u\sin u + \cos^2 u\sin u) = R^5\sin u$

$$\int_F v\,df = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} v(r(,u,v)) \cdot r_u \times r_v\,du\,dv = R^5\sin u\,du\,dv = R^5 \cdot (-\cos u)\big|_0^{\pi} = 2\pi \cdot 2R^5 = 4\pi R^5$$

---

2. Számítsuk ki a $v(r) = \dfrac{r}{|r|^3}\,,\; r \in \mathbb{R}^3, r \neq 0$ függvény divergenciáját! Felhasználható-e a Gauss-Osztrográdszkij tétel a v-nek az előző példabeli F-en vett felületmenti integráljának kiszámítására? Ha igen, számítsa ki ilyen módon.

MO. (A) (a) Felhasználjuk, hogy ha u egy skalár-vektor függvény, v pedig egy vektor-vektor függvény, akkor $\operatorname{div}(u\,v) = u \operatorname{div} v + v \cdot \operatorname{grad} u$ (persze ott ahol mind u mind v deriválható), továbbá, hogy ha f egy valós függvény, akkor láncszabállyal

$$\operatorname{grad} f(|r|) = f'(|r|) \cdot \operatorname{grad}|r| = f'(|r|) \cdot \frac{r}{|r|}\,.$$

Így, ha $r \in \mathbb{R}^3, r \neq 0$, akkor $\quad \operatorname{grad}\dfrac{1}{|r|^3} = -3 \cdot \dfrac{1}{|r|^4} \cdot \dfrac{r}{|r|} = -\dfrac{3r}{|r|^5}\,,$ tehát

$$\operatorname{div}\left(\frac{r}{|r|^3}\right) = \frac{1}{|r|^3}\operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad}\frac{1}{|r|^3} = \frac{3}{|r|^3} - \frac{r \cdot r}{|r|^5} = \frac{3}{|r|^3} - \frac{3}{|r|^3} = 0\,.$$

(b) Koordinátánként: ha $v(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$,
akkor $\operatorname{div} v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z}$, így mivel $v(r) = v(x,y,z) = \dfrac{r}{|r|^3} = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}(x,y,z)$,

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3 - 3x^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} ,$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3 - 3y^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} ,$$
$$\frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3 - 3z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} .$$

Ezért $\operatorname{div} v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z} = 0$

(B) Nem: a térrészen (a gömb belsejében) nem létzik a v divergenciája, hiszen v az origóban nyilván nem folytonos.

---

3. Legyen F az R sugarú origóközéppontú kifelé irányított gömb és k a z tengely irányú egységvektor. Határozza meg a $v(r) = k \times r$, $r \in \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény divergenciáját és F-en vett felületmenti integrálját a Gauss-Osztrogradszkij tétel segítségével!

MO.

(1) $\operatorname{div} v = 0$ ugyanis

(a) $v(r) = k \times r$ lineáris operátor, melynek deriváltja önmaga, így a div$v$ ennek skalárinvariánsa. De persze v antiszimmetrikus, így (szokásos bázisbeli) mátrixa is az, tehát a főátlójában 0-k allnak, amelyek összege, tehaát $v(r) = k \times r$ skalárinvariánsa, azaz v divergenciája 0.

(b) Koordinátánként: $v(r) = k \times r = (0,0,1) \times (x,y,z) = (-y, x, 0)$ és
$\operatorname{div} v = \dfrac{\partial -y}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial y} + \dfrac{\partial 0}{\partial z} = 0$.

Tehát div$v = 0$, ezért aztán persze: $\displaystyle\int_F v\,df = \int_V \operatorname{div} v\,dv = \int_V 0\,dv = 0$.

(2) Egyébként persze tényleg a felületmenti integrál 0, hiszen a gömb normálisa mindenütt sugár–, azaz r–irányú, tehát merőleges az integrandusra.

(3) Felületmenti integrál kiszámítására szolgáló általános formulával:

F egyenlete: $r = r(u,v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u)$, $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le 2\pi$, $k = (0,0,1)$.

$k \times r = (-R\sin u\sin v, R\sin u\cos v, 0)$

$r = r_u(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, -R\sin u)$
$r = r_v(u,v) = (-R\sin u\sin v, R\sin u\cos v, 0)$
$r_u \times r_v = (R^2\sin^2 u\cos v, R^2\sin^2 u\sin v, (R^2\cos u\sin u\cos^2 v + R^2\cos u\sin u\sin^2 v)) =$
$= (R^2\sin^2 u\cos v, R^2\sin^2 u\sin v, R^2\cos u\sin u))$

$v(r(,u,v)) = k \times r(u,v) = (-R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, 0)$

$v(r(,u,v)) \cdot r_u \times r_v = R^2\sin^2 u\sin v\cos v - R^2\sin^2 u\sin v\cos v = 0$

$$\int_F v df = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v(r(,u,v)) \cdot r_u \times r_v du dv = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 0 du dv = 0$$

Vonalintegrál

Legyen K az origóközéppontú R sugarú $[xy]$ síkbeli pozitívan irányított körvonal és $v(r) = |r|^2(k \times r)$ minden $r \in \mathbb{R}^3$ esetén. Határozza meg a v vektor-vektor függvény K-en vett vonalmenti integrálját!

MO. Jelölések: $\int_L v\,dr$ a v függvény L-en vett vonalmenti integrálja, $\int_L v\,|dr|$ a függveény ívhossz szerinti integrálja, $|L|$ az L ívhossza.

(1) Stokes-tétellel: $\displaystyle\int_K v\,dr = \int_{K^*} \operatorname{rot} v\,df$, ahol K^* a K által bezárt körlap. (A tétel alkalmazható hisz v folytonosan deriválható: $k \times r$ lineáris operátor, $|r|^2 = x^2+y^2+z^2$ triviálisan folytonosan deriválható.)

(a) $k \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & x \end{vmatrix} = (-y, x, 0) \quad \rightsquigarrow \quad v = \big(-y(x^2+y^2+z^2), x(x^2+y^2+z^2), 0\big) \quad \rightsquigarrow$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y(x^2+y^2+z^2) & x(x^2+y^2+z^2) & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{(-2xz, 2yz, 4(x^2+y^2)+2z^2)}.$$

(b) K^* egyenlete: $\boldsymbol{r = r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 0)}$, $0 \le u \le R,\ 0 \le v \le 2\pi$.
Ebből $\quad r_u = (\cos v, \sin v, 1) \quad r_v = (-u\sin v, u\cos v, 0), \quad$ tehát

$$\boldsymbol{r_u \times r_v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{(0, 0, u)}.$$

(c) $\operatorname{rot} v$ K^*-on: $\quad \boldsymbol{\operatorname{rot} v(r(u,v)) = (0, 0, 4u^2)}$,
(Másképpen szorzat rotációjára vonatkozó formulával K-n közvetlenül: $\operatorname{rot}|r|^2(k \times r) =$
$= |r^2|\operatorname{rot}(k \times r) - (k \times r) \times \operatorname{grad}|r|^2 = 2k|r|^2 - 2(k \times r) \times r = 2k|r|^2 + 2k|k \times r||r| =$
$= 2k|r|^2 + 2|k||r||r| = 4k|r|^2$ mert $\operatorname{rot}(k \times r) = 2k$ továbbá K-n a $(k \times r) \times r$ vektor $-k$ irányú és $(k \times r) \perp r$. Azaz így is $\operatorname{rot} v(r(u,v)) = 4k|r|^2 = 4k(u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v) = 4ku^2$.)

(d) Tehát $\operatorname{rot} v(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v) = 0 + 0 + 4u^2 = 4u^3$.
Ezt kell K^*-on integrálni, amiből $\displaystyle\int_K v\,dr = \int_{K^*} \operatorname{rot} v\,df = \int_0^R \int_0^{2\pi} 4u^3\,du\,dv = 4 \cdot 2\pi\,\frac{R^4}{4} = 2R^4\pi.$

(2) Felhasználjuk, hogy egy függvény görbementi integrálja megegyezik a függvénynek a a görbe érintőre eső vetületének v_e-nek ívhossz szerinti integráljával. Ezzel:
$v = |r|^2(k \times r) \ \perp k$ miatt v benne van a síkban, továbbá. $v = |r|^2(k \times r) \ \perp r$ és k, r, v jobbcsavart alkot $\rightsquigarrow$ $v \,||\, \dot r$ hisz $\dot r$ pozitív érintőirányú $\rightsquigarrow$ $v_e = |v| = |r|^2|k \times r| = |r|^2|k||r|$ (hisz persze $r \in K$ $\rightsquigarrow$ r benne van az $[xy]$ síkban $\rightsquigarrow$ $k \perp r$) így a körön (ahol $r = R$) $v_e = |k||r|^3 = |r|^3 = R^3$, tehát

$$\int_K v\,dr = \int_k v_e\,|dr| = \int_K R^3\,|dr| = R^3 \int_K |dr| = R^3\,|K| = R^3\,2R\pi = 2R^4\pi.$$

(3) Vonalmenti integrál kiszámítására szolgáló általános formulával:
K egyenlete: $r = r(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$. Ebből: $\dot r = (-R\sin t, R\cos t, 0)$ és

$k \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ R\cos t & R\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R\sin t, -R\cos t, 0), \quad |r| = \sqrt{R^2\cos^2 t + R^2\sin t + 0^2} = R \quad \rightsquigarrow$

$v = |r|^2(k \times r) = (R^3\sin t, -R^3\cos t, 0) \ \rightsquigarrow$

$v \cdot \dot r = -R^4\sin^2 t - R^4\cos^2 t + 0 = R^4 \ \rightsquigarrow \quad \displaystyle\int_K v\,dr = \int_0^{2\pi} R^4\,dt = 2\pi R^4.$