2. KONVERGENCIAVIZSGÁLAT

10. Bizonyitsuk be a következő állitásokat!

1. Ha (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, és van olyan $N\in\mathbb{N}$, hogy minden $n>N$ esetén $a_n \leq c_n \leq b_n$, akkor (c_n) is konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

2. Ha (a_n) konvergens sorozat és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, $\forall k\in\mathbb{N}$ akkor $\forall k\in\mathbb{N}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k ,$$

és

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/k} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{1/k} .$$

3. Ha (a_n) konvergens sorozat, akkor létezik

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| , \text{ és}$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| .$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right| = +\infty .$$

2.1 Explicite adott sorozatok

Határozzuk meg az alábbi (a_n) sorozatok határértékét amennyiben az létezik!

11. $\boxed{1.}$ $a_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2+n-1}$ 2. $a_n = -\dfrac{3}{n^2}$

3. $a_n = n - n^2$ 4. $a_n = (-1)^{n+1}\cdot n$

5. $a_n = 2 + 4n$ 6. $a_n = n^3 + (-1)^{n-1}\cdot n^3$

7. $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$ 8. $a_n = \dfrac{-4n^2+5}{5n^3-2n}$

9. $a_n = \dfrac{n^2+3n-1}{2n^2+7n+2}$ 10. $a_n = \dfrac{5n^2-2}{3n+1}$

11. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^5$ 12. $a_n = \sqrt[3]{\dfrac{2n^2+7n-1}{16n^2-8n+2}}$

13. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{4n^2+3n}}{n+2}$ 14. $a_n = \dfrac{\sqrt{n+5}}{\sqrt[3]{1-\frac{4}{n}}}$, $n \neq 4$

15. $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{n+4}}{\sqrt[3]{n^2+2n-3}}$ 16. $a_n = \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$

20. $a_n = \sqrt[3]{n} - \sqrt[5]{n}$

17. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}}$

18. $a_n = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(5n-1)^5}$

19. a) $a_n = (-1)^n\cdot\left(1+(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n^2}\right)$

b) $b_n = \sqrt{a_n^2}$

12. 1. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2}$ 2. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\cdot\frac{k}{\sqrt{n^2+1}}$

3. $a_n = \dfrac{1+3+5...+(2n-1)}{2+4+6+...+2n}$ 4. $a_n = \dfrac{1+2+3+...+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$

13. 1. $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$ 2. $a_n = \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

3. $a_n = \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$